U$_\mathbf{A}$M Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Wydział Matematyki
i Informatyki
ul. Umultowska 87
61–614 Poznań

Adam Mickiewicz University
Faculty of Mathematics
and Computer Science
fax: +48(61)8295315

Seminarium SFARA

Teoria Hondy - Tate'a

B1-37, czwartek, 13.45 - 15.15
Prowadzący: W.Gajda, B.Naskręcki
Uczestnicy: J.Garnek, K.Górnisiewicz, A.Kaim, A.Kokosza, M.Krawiarz, M.Narożańska, Ł.Nizio, W.Wawrów i inni

Podczas seminarium *SFARA* w tym semestrze omówimy podstawy teorii rozmaitości abelowych nad ciałem skończonym. Takie rozmaitości klasyfikujemy za pomocą wartości własnych macierzy operatora Frobeniusa. Główne twierdzenie teorii Hondy-Tate'a, którego dowód przeanalizujemy pochodzi z pracy Hondy [Ho] i prac Tate'a [Ta1], [Ta2] (patrz także świetne notatki Fransa Oorta na ten temat w pracy [Oo]).

Twierdzenie [Honda-Tate] *Niech $k=\mathbf{F}_q$ będzie ciałem q-elementowym i niech ℓ będzie liczbą pierwszą różną od charakterystyki k. Istnieje naturalna bijekcja zbiorów:*

$$\mathcal{M}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}(q), \tag{1}$$

gdzie $\mathcal{M}(k)$ oznacza zbiór klas izogenii prostych rozmaitości abelowych zdefiniowanych nad ciałem k, a $\mathcal{W}(q)$ jest zbiorem klas sprzężoności q-liczb Weila.

W tym twierdzeniu q-liczba Weila jest z definicji taką liczbą algebraiczną całkowitą, której wartość bezwględna przy dowolnym zanurzeniu w $\mathbf{C}$ wynosi $\sqrt{q}$. Twierdzenie Hondy-Tate'a jest pięknym matematycznym osiągnięciem, bo pozwala opisać za pomocą liczb algebraicznych skomplikowane w konstrukcji obiekty geometryczne, którymi są niewątpliwie rozmaitości abelowe. Przekształcenie (1) jest dobrze zdefiniowane na mocy hipotezy Riemanna dla rozmaitości abelowych nad $\mathbf{F}_q$, którą sformułował i udowodnił Weil. Iniektywność tego przekształcenia wynika z izomorfizmu Tate'a z [Ta1]:

$$\hom_k(A,B)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \hom_{G_k}(T_\ell(A),T_\ell(B)), \tag{2}$$

gdzie G_k jest absolutną grupą Galois ciała k, a $T_\ell(A)$ oznacza moduł Tate'a i ℓ jest liczbą pierwszą różną od charakterystyki ciała k. Przy tym iniektywność (2) jest łatwa w dowodzie i zachodzi w ogólnym przypadku. Izomorfizm (2) ma inne istotne zastosowania. Jednym z nich jest dowód hipotezy Tate'a o tym, że Galois niezmiennicze klasy kohomologii etale pochodzą od cykli algebraicznych, w przypadku klas z pierwszej grupy kohomologii etale rozmaitości abelowej. Surjektywność przekształcenia (1) została dowiedziona przez Hondę w [Ho]. Naszym głównym celem w tym semestrze będzie przedstawienie pełnego dowodu Twierdzenia Hondy-Tate'a. Podczas czterech pierwszych wykładów *SFARy* dowiedziemy część Tate'a tej teorii, tzn. izomorfizm (2), gdzie surjektywność jest zdecydowanie trudniejsza w dowodzie. Podczas piątego i szóstego wykładu przedyskutujemy pewne zastosowania izomorfizmu Tate'a. Pozostałe cztery wykłady seminarium poświęcimy już pełnemu dowodowi surjektywności przekształcenia (1) z Twierdzenia Hondy-Tate'a.

Wykład 1. Wprowadzenie
Omówimy podstawy teorii rozmaitości abelowych nad ciałem globalnym. Sformułujemy hipotezy: Tate'a, Szafarewicza i Mumforda-Tate'a.
12 października, *wykłada: W.Gajda*

Wykłady 2 i 3.
Przygotujemy dowód iniektywności (2) i przeprowadzimy pierwszą część dowodu surjektywności. Korzystamy z pracy Tate'a [Ta1]; patrz także: [Mu], [Mi] i [CS]. Plan wykładu:

- Zdefiniować moduł Tate'a rozmaitości abelowej jako moduł Galois. Skonstruować przekształcenie (2).
- Dowód iniektywności (2). Korzystamy z [Mi].
- Od tego momentu zakładamy, że k jest skończone. Rozpoczynamy dowód surjektywności. Redukcja do przypadku wymiernego modułu Tate'a i jego algebry endomorfizmów (Lemmata 1 i 3 z [Ta1]).
- Pokazać, że iniektywność jest niezależna od ℓ (Lemma 2).
- Zredukować do dowodu półprostoty Frobeniusa i relację na komutant (Lemma 4).
- Wprowadzić istotne założenie $Hyp(k; A; d; \ell)$ na skończoność, które jest trywialnie spełnione nad ciałem skończonym. Przypomnieć definicję formy dwuliniowej Weila rozmaitości abelowej (początek paragrafu 2 z [Ta1]).

19.10 i 26.10, *wykładają: A.Kaim i A.Kokosza*

Wykłady 4. Kończymy dowód surjektywności (2). Korzystamy z [Ta1], str. 136-139.

- Zakładając $Hyp(k; A; d; \ell)$ oraz istnienie maksymalnej izotropowej Galois niezmienniczej podprzestrzeni $W \subset V_\ell(A)$, wykazać istnienie projektora $u : V_\ell(A) \to W$ dla endomorfizmum A ([Ta1], Proposition 1).
- Zakładając $Hyp(k; A; d; \ell)$ i półprostotę Frobeniusa nad $\mathbf{Q}_\ell$, wykazać bijektywność (2) (patrz [Ta1], Proposition 2).
- Zakończyć dowód pokazując półprostotę Frobeniusa i niezależność od ℓ (patrz [Ta1], koniec paragrafu 2).

9.11, *wykłada: M.Krawiarz*

Wykłady 5 i 6. Zastosowania izomorfizmu Tate'a Naszym celem podczas tych dwóch wykładów będzie przedstawienie zastosowań dowiedzionego już izomorfizmu Tate'a (2). Korzystamy z [Ta1].

- Zdefiniować liczby Weila i skonstruować przekształcenie (1) (patrz [Oo]).
- Sformułować i dowieść Theorem 1 z [Ta1], które daje równoważne warunki na istnienie izogenii pomiędzy dwoma rozmaitościami abelowymi. W szczególności wynika z tego iniektywność (1) (patrz także [Ei], paragraf 6, str.9).
- Sformułować Theorem 2 z [Ta1], które ustala ważne własności algebry endomorfizmów $End_k(A) \otimes \mathbf{Q}$. Przedyskutować dowody tych własności.

16.11 i 23.11, *wykładają: M.Narożańska i B.Naskręcki*

Wykłady 7 i 8. (**Surjektywność (1)**)
Rozpoczynamy dowód surjektywności funkcji (1), która klasie izogenii przyporządkowuje liczbę Weila. Dowód poprowadzimy jak w pracy [Ei].

- Podać przykłady liczb Weila ([Ei], par.5, str. 7-8).
- Liczba Weila π jest *efektywna*, jeśli istnieje prosta rozmaitość abelowa $A/\mathbf{F}_q$ taka, że jej Frobenius ma wartość własną π przy pewnym zanurzeniu liczb algebraicznych w $\mathbf{C}$ ([Ei], par.7).
- Niech N będzie liczbą naturalną. Jeśli π^N jest efektywna, to π jest efektywna ([Ei], Lemma 7.1).
- Niech $E := E(\pi)$ będzie centralną, prostą algebrą nad ciałem $F := \mathbf{Q}(\pi)$. Dowieść, że istnieje CM-ciało liczbowe zawierające F, nad którym algebra E się rozkłada ([Ei], Lemma 7.2.).
- [Ei], Definicja 7.3: *Rozmaitość A jest typu (L), jeżeli A ma mnożenia zespolone przez ciało L.*
- Sformułować Lemma 7.4 z [Ei]; bez dowodu. Zakończyć dowód Twierdzenia Hondy-Tate'a korzystając z lematów 7.1, 7.2 i 7.4 z pracy [Ei].

30.11 i 7.12, *wykładają: Ł.Nizio i W.Wawrów*

Wykład 9 i 10. (**Zakończenie dowodu Twierdzenia Hondy-Tate'a**)
Wykłady będą oparte na [E1], [ST1] i [ST2]. Zakończymy dowód głównego twierdzenia naszego seminarium omawiając szczegóły dowodu Lematu 7.4. z pracy [E1]. [1]

- Przeprowadzić dowód Lematu 7.6 z [Ei]. Kluczowa w dowodzie konstrukcja schematu abelowego nad pierścieniem liczb całkowitych pewnego ciała liczbowego L z mnożeniem zespolonym typu $(L; \Phi)$ (Definicja 7.5) pochodzi z [ST1], Theorem 7 i

[1] Dwa ostatnie wykłady SFARy w tym semestrze są dość skomplikowane technicznie i wymagają dobrego przygotowania od wykładowców.

[ST2] 6.2, 12.4. Omówić tą konstrukcję. Można skorzystać przy tym z notatek Briana Conrada [Co] do podobnego seminarium lub z pracy [Oo]. Jest to najtrudniejszy do przygotowania punkt wykładów SFARy w tym semestrze.

- Drugim składnikiem dowodu Lematu 7.4 z [Ei] jest Lemat 7.7 z tej pracy, który mówi, że można podnieść operator Frobeniusa włókna specjalnego schematu abelowego z Lematu 7.6 do endomorfizmu całego schematu. Przeprowadzić dowód tego faktu korzystając z [ST1], paragraf 7 oraz z pracy Hondy [Ho], str. 89.

14.12.2017 i 11.01.2018, *wykłada: J.Garnek.*

Literatura[2]

[**Mu**] Mumford D.: Abelian varieties, Oxford univ. press, 1970.

[**Mi**] Milne J.: Abelian varieties,
www.jmilne.org/math

[**Co**] Conrad B.: Shimura-Taniyama formula,
www.math.stanford.edu/ conrad/vigregroup/vigre04/stformula.pdf

[**CS**] Cornell G., Silverman J.: Arithmetic geometry, Springer 1986.

[**Ta1**] Tate J.: Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math. 2, 134-144 (1966).

[**Ta2**] Tate J.: Classes de isogenies de varietes abeliennes sur un corps fini (de apres T. Honda). Sem. Bourbaki 21 (1968-1969), Exp. 352.

[**Ei**] Eisentrager K.: The theorem of Honda and Tate.
www.math.psu.edu/eisentra/hondatate.pdf

[**Ho**] Honda T.: Isogeny classes of abelian varieties over finite fields, Journ. Math. Soc. Japan, 20, 1968, 83-95.

[**Oo**] Oort F.: Abelian varieties over finite fields,
www.math.nyu.edu/ tschinke/books/finite − fields/final/05oort.pdf

[**ST1**] Serre J.-P., Tate J.: Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. (2) 88, 1968, 492-517.

[**ST2**] Shimura G., Taniyama Y.: Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory, Publ. Math. Soc. Japan 6, 1961.

Program seminarium przygotował W.Gajda.

[2]Wszystkie pozycje z tego spisu dostępne są w bibliotece WMI UAM, w B1-35 lub na koncie dropbox SFARy.