

# Seminarium SFARA

## *Dynamika Arytmetyczna*

B1-37, czwartek, 15.30 - 17.30

**Prowadzący:** W.Gajda i Ł.Nizio

**Uczestnicy:** J.Garnek, K.Górnisiewicz, A.Kaim, A.Kokoszka,  
M.Krawiarz, B.Naskręcki, W.Wawrów i inni

Podczas seminarium *SFARA* w tym semestrze omówimy podstawy teorii dynamiki endomorfizmów obiektów arytmetycznych, takich jak na przykład: funkcje wymierne na przestrzeniach rzutowych, wielomiany Czebyszewa drugiego rodzaju oraz przekształcenia Lettesa na krzywych eliptycznych. W ostatnim czasie dynamika arytmetyczna, która bada arytmetyczne własności systemów dynamicznych, przeżywa bujny rozwój. Przy tym poziom technicznego zaawansowania technik tej teorii pozostaje nadal dostępny dla prawie każdego studenta matematyki po podstawowych kursach algebry i analizy. Podczas seminarium poznamy podstawy teorii arytmetycznych systemów dynamicznych. Nasze wykłady powinny zainteresować studentów matematyki i jej zastosowań. Wykłady z tego opisu oprzemy na książce i notkach Silvermana [Silv2007] i [Silv2010].

### **Wykład 1 i 2. Wprowadzenie**

Omówimy materiał z pierwszych czterech rozdziałów notek Silvermana [Sil2010]. Po wprowadzeniu definicji systemu dynamicznego oraz przedstawieniu przykładów dowodzimy Thm. 5 z [Sil2010]. Pierwszy wykład powinien zakończyć się dowodem jednego z twierdzeń o zbiorach fraktalnych: Thm. 8, 10 lub 11. Proszę nie zapominać o konieczności **rozwiązywania ćwiczeń** z [Sil2010]. Szczególnie Exercise G o wielomianach Czebyszewa będzie nam bardzo potrzebne w dalszym ciągu seminarium. Drugi wykład pana Bartosza powinien zawierać rzetelne wprowadzenie do teorii wysokości w sensie Weila oparte na książce [HS]. Ponadto dowodzimy Thm. 12, Prop. 13 i Thm. 14 z [Silv2010] korzystając przy tym z [Silv2007].

**15 i 22 marca 2018, wykład:** B.Naskręcki

### **Wykłady 3 i 4. Punkty preperiodyczne i funkcje wysokości**

Omawiamy rozdział 5 notek [Silv2010]. Przeprowadzić dowody Thm. 15 i 17. Wprowadzić spolaryzowane systemy dynamiczne, wysokości lokalne i funkcje Greena według opisu w *Supplementary material* na stronie 15. Przedyskutować hipotezy: 18, 20, 21 i 22 oraz Thm. 19 (bez dowodu). Pamiętajmy o konieczności rozwiązywania ćwiczeń z notatek [Silv2010], które stanowią ważną część wykładu.

**29.03 i 12.04, wykładają:** K.Górnisiewicz, A.Kaim i M.Krawiarz

### **Wykłady 5 i 6. Dynamika przekształceń dobrej redukcji**

Podczas tych dwóch wykładów przedyskutujemy materiał z rozdziału 6 z [Silv2010]. Przypomnieć definicję rezultantu dwóch wielomianów oraz omówić pojęcie dobrej redukcji funkcji wymiernej. Dowieść Prop. 24, Thm. 25 i Cor. 26. Na zakończenie przedyskutować dowód Thm. 27 z [Zieve].

**19.04 i 26.04**, wykłada: *A.Kokosza i W.Wawrów*

### **Wykłady 7 i 8. Punkty całkowite orbit**

Rozdział 7 jest bardzo ważną częścią [Silv2010]. Przeprowadzimy dowód Thm. 30. Następnie dowodzimy Prop. 31 i omówiamy hipotezę 32 sformułowaną przez S.Langa.

**10.05 i 17.05**, wykłada: *Ł.Nizio*

### **Wykład 9. Dynamika i arytmetyka; analogie i różnice**

Podczas wykładu przedstawimy klasyczne hipotezy geometrii arytmetycznej: Manina-Mumforda, Bogomolowa, Mordella-Langa oraz ich odpowiedniki dynamiczne. W uzupełnieniu do [Silv2010] podam szkic dowodu twierdzenia Raynaud lub twierdzenia Faltingsa.

**24.05**, wykłada: *W.Gajda*

### **Wykłady 10, 11 i 12. Przekształcenia Lattesa krzywych eliptycznych**

Korzystamy z szóstego rozdziału książki [Silv2007]. Po krótkim omówieniu materiału wprowadzonego w podrozdziałach 6.1, 6.2 i 6.3 (krzywe eliptyczne w tym semestrze wykłada kolega Banaszak) należy szczegółowo omówić własności przekształceń Lattesa z 6.4. Dwa ostatnie wykłady naszego seminarium powinny zawierać materiał wybrany z podrozdziałów 6.5, 6.6 i 6.7 książki [Silv2007]. Omówić szczegółowo dowody Thm. 6.65 i Thm. 6.67 na szacowanie liczby punktów preperiodycznych oraz dowód Thm. 6.69 z jak największą ilością szczegółów dowodu. Zakończyć wyprowadzeniem Thm. 6.70 z Thm. 6.69 i krótką informacją o hipotezie ABC.

**31.05, 7.06 i 14.06.2018**, wykładają: *J.Garnek i Ł.Nizio*.

## **Literatura<sup>1</sup>**

- [HS] Hindry, M., Silverman, J.: *Introduction to Diophantine Geometry*, SV 1998.
- [Silv2010] Silverman, J.: *Lecture Notes on Arithmetic Dynamics*, Arizona Winter School, March 13-17, 2010.
- [Silv2007] Silverman, J.: *The Arithmetic of Dynamical Systems*, Springer 2007.
- [Silv1992] Silverman, J.: *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. Jour. **71** (3), 793-829 (1992).
- [Zieve] Zieve, M.: *Cycles of Polynomial Mappings*, PhD. Thesis, University of California at Berkeley 1996.

*Program seminarium przygotował W.Gajda.*

---

<sup>1</sup>Proszę, aby każdy z wykładowców przed swoim wykładem kontaktował się z prowadzącymi seminarium w sprawie wyboru omawianych zagadnień, twierdzeń i dowodów.