U$_{\mathbf{A}}$M Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki
i Informatyki
ul. Umultowska 87
61–614 Poznań

Adam Mickiewicz University
Faculty of Mathematics
and Computer Science
fax: +48(61)8295315

Seminarium SFARA

Hipoteza Tate'a dla powierzchni typu K3 w charakterystyce p>2

B1-38, wtorek, 14.00 - 16.00
Prowadzący: W.Gajda[1], B.Naskręcki
Uczestnicy: J.Garnek, K.Górnisiewicz, A.Kaim, M.Krawiarz, M.Narożańska, W.Wawrów i inni

Madapusi Pera w pracy [Mad13] podał dowód hipotezy Tate'a dla K3-powierzchni w charakterystyce $p > 2$. Wykazał, że dla każdej K3-powierzchni X nad ciałem skończenie generowanym k charakterystyki $p>2$ i dla liczby pierwszej $\ell \neq p$, $\ell-$adyczny charakter Cherna indukuje izomorfizm:

$$Pic(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^2_{et}(X_{k^{sep}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{Gal(k^{sep}/k)}.$$

Dowód Madapusi Pery opiera się na zastosowaniu własności całkowitych modeli rozmaitości Shimury (niekoniecznie typu PEL), które wykazał Kisin w [Kis10] wykorzystując przy tym wcześniejsze wyniki Vasiu z [Vas99]. Dowód hipotezy Tate'a dla K3-powierzchni jest tylko jednym z zastosowań osiągnięcia Kisina (porównaj, na przykład z [Zha13] i z [Kis11]). W pierwszej części seminarium *SFARA* w tym semestrze omówimy szczegóły pomysłu Kisina, aby użyć całkowite modele Kottwitza rozmaitości Shimury typu PEL do przedłużenia konstrukcji na przypadek rozmaitości Shimury typu Hodge'a i dalej na przypadek rozmaitości Shimury typu abelowego. W drugiej części seminarium zajmiemy się wykorzystaniem tych nowych modeli całkowitych i ich własności strukturalnych do dowodu hipotezy Tate'a dla K3-powierzchni.

Wykład 1. (**Rozmaitości Shimury nad** $\mathbb{C}$) (krótki wykład)
Wprowadzamy rozmaitości Shimury nad $\mathbb{C}$ jako zespolone przestrzenie analityczne dane podwójnym ilorazem:

$$Sh_K(G, X)(\mathbb{C}) := G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbb{A}_f)/K).$$

Tutaj G jest reduktywną grupą algebraiczną nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{S} := Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$, $X \subset Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}, G_{\mathbb{R}})$ jest $G(\mathbb{R})-$klasą sprzężoności (przy dodatkowych warunkach na zgodność), a $K \subset G(\mathbb{R})$ jest podgrupą zwartą. Celem wykładu jest podanie definicji rozmaitości Shimury nad $\mathbb{C}$ i podsumowanie wyników o istnieniu modelu kanonicznego nad ciałem liczbowym E (tzw. ciałem *reflex*). Należy wykorzystać [Moo98, Sec.1 i 2] oraz oryginalną pracę Deligne'a z 1979 roku o rozmaitościach Shimury.

19 marca, *wykłada: Magdalena Narożańska.*

[1] *Program seminarium przygotował W.Gajda.*

Wykład 2. (**Modele całkowite PEL rozmaitości Shimury**)
Celem tego wykładu jest przedstawienie definicji kanonicznego modelu całkowitego Milnego [Kis10, 2.3.7][2] i omówienie jego konstrukcji w przypadku typu PEL. Skorzystać z pracy Kottwitza [Ko91, głównie Sekcje 5 i 8], chociaż istnieje wiele innych dobrych referencji na ten temat. Zamiast przedstawiać każdy szczegół (np. precyzyjnego sformułowania warunku na wyznacznik lub wyników o reprezentowalności) skoncentrować się raczej na przekonaniu słuchaczy, że ta konstrukcja ma właściwe włókno nad $\mathbb{C}$ i posiada własność przedłużenia jak u Milnego. Jeśli wykładowca tak zdecyduje (ze względów czasowych) można ograniczyć się tylko do sprawdzenia tych własności dla przypadku rozmaitości Siegela.

26.03, *wykłada: Mietek Krawiarz.*

Wykład 3. (**Modele całkowite rozmaitości Shimury typu Hodge'a I**)
Omawiamy konstrukcję z [Kis10] kanonicznego modelu całkowitego rozmaitości Shimury typu Hodge'a przez zanurzenie w rozmaitości typu PEL. Dokładniej mówiąc, każde zanurzenie danych Shimury $i{:}(G,X) {\to} (GSp, S^{\pm})$ definiuje zanurzenie rozmaitości Shimury $Sh_K(G,X) {\to} Sh_{K'}(GSp, S^{\pm})$ nad ciałem reflex (porównaj [Kis10, 2.1]). Wiemy już, że rozmaitość $Sh_{K'}(GSp, S^{\pm})$ posiada kanoniczny model całkowity $\mathcal{S}_{\mathcal{K}'}(GSp, S^{\pm})$. Normalizację domknięcia Zariskiego $Sh_K(G,X)$ w $Sh_{K'}(GSp, S^{\pm})$ przy tym zaanurzeniu przyjmujemy jako naturalnego kandydata na model całkowity $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}(G,X)$ rozmaitości Shimury $Sh_K(G,X)$. Naszym celem podczas tego wykładu będzie przeprowadzenie dowodu Thm. 2.3.8, punkt (2) z [Kis10], to znaczy wykazanie, że $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}(G,X)$ ma wszystkie własności modelu całkowitego, za wyjątkiem gładkości, którą wykażemy na kolejnych wykładach. Należy dobrze omówić sformułowanie twierdzenia [Kis10, Thm. 2.3.8] i wykorzystywane w nim obiekty.

2.04, *wykłada: Jędrzej Garnek.*

Wykład 4 i 5. (**Modele całkowite rozmaitości Shimury typu Hodge'a II**)
Pozostaje nam dowieść, że schemat $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}(G,X)$ jest gładki, co jest zdecydowanie najtrudniejszym zadaniem w tej części seminarium. Dla osiągnięcia tego celu potrzebujemy przygotowania (z [Kis10, 1.3-1.5]), które stanowi główną część tych dwóch wykładów. Musimy omówić następujące fakty i definicje z pracy Kisina.

- Jeśli $G \subset GL(M)$ jest reprezentacją wierną (nad pewnym DVR), to G może być opisana jako stabilizator zbioru elementów w pewnej potędze tensorowej M, [Kis10, Prop. 1.3.2].
- Własności funktora z grup $p-$podzielnych do ϕ-modułów z [Kis10, Cor. 1.4.3]. Ten funktor zadany jest za pomocą pewnej wersji funktora Fontaine'a na reprezentacjach krystalicznych, [Kis10, Thm. 1.2.1].
- Zdefiniować pierścień R_G i sformułować [Kis10, Cor. 1.5.11].

9.04, 16.04, *wykłada: Jędrzej Garnek.*

[2] W różnych pracach pojawiają się różne definicje schematów testowych, patrz [Moo98, 3.5 i 3.9], gdzie dokonano porównania definicji.

Wykłady 6. (**Modele całkowite rozmaitości Shimury typu Hodge'a III**)
Wprowadzić absolutne cykle Hodge'a jak w [Kis10, 2.2] i dalej do Cor. 2.2.2, oraz omówić kluczowe Prop. 2.3.5 wraz ze szczegółami dowodu. Z tego wynika (prawie natychmiast) gładkość, której tutaj potrzebujemy.

30.04, *wykłada: W.Gajda.*

Wykład 7. (**Modele całkowite rozmaitości Shimury typu abelowego**)
Ze względu na ograniczenia czasowe przypadek rozmaitości Shimury typu abelowego omawiamy w dużym skrócie. Zamierzamy przekonać słuchaczy, że w tym przypadku istnieje całkowity model kanoniczny, cf. [Kis10, Thm. 3.4.10 i Cor. 3.4.14] oraz wyjaśnić jego konstrukcję za pomocą równania (3.4.11) w *loc. cit.* Przy tym kluczowa wydaje się alternatywna definicja rozmaitości Shimury nad ciałem reflex z [Kis10, Prop. 3.3.10].

7.05, *wykłada: Bartosz Naskręcki.*

Wykład 8. (**Konstrukcja Kugi-Satake**)
Przedstawić konstrukcję Kugi-Satake (patrz [Huy, rozdział 4]), która jest całkowicie analityczna i przyporządkowuje powierzchni K3 (z zadaną szeroką wiązką liniową) rozmaitość abelową wymiaru 2^{19} (z polaryzacją), lub równoważnie, przyporządkować (spolaryzowaną) strukturę Hodge'a wagi 1 (spolaryzowanej) sktrukturze Hodge'a typu K3 (wagi 2). Naszym następnym celem jest zrozumienie tej konstrukcji w rodzinach (nadal nad $\mathbb{C}$), co samo w sobie, nie jest banalnym zadaniem. Podsumowując, przejście od powierzchni K3 do rozmaitości abelowych następuje zgodnie z diagramem:

$$M_{2d} \overset{2:1}{\longleftarrow} \widetilde{M}_{2d} \overset{Torelli}{\longrightarrow} Sh_{K_0}(L_d) \overset{finite-etale}{\longleftarrow} Sh_K(L_d) \overset{Kuga-Satake}{\longrightarrow} Sh_{\mathcal{K}}(C(L_d)).$$

Tutaj L_d oznacza szczególną kratę ([Mad13, 2.10]), $C(L_d)$ jej algebrę Clifforda, M_{2d} jest przestrzenią moduli K3-powierzchni z ustaloną strukturą poziomu, $\widetilde{M_{2d}}$ jej dwulistnym nakryciem, $Sh_{K_0}(L_d)$ jest rozmaitością Shimury stowarzyszoną z $SO(L_d)$, $Sh_K(L_d)$ jest[3]stowarzyszoną z $GSp(L_d)$, a $Sh_{\mathcal{K}}(C(L_d))$ z $GSp(C(L_d))$. Istotne argumenty w tym kierunku znajdują się w [Mad12, 3.1-3.10] i [Mad13, Props. 3.3 i 4.2]. Warto także skonsultować ładnie napisane [Riz10, Sect. 2.5], mimo tego, że zawarte tam odpowiednie sformułowania są nieco słabsze od tych z [Mad12].

Uwaga do dalszych wykładów: Do tej pory zdefiniowaliśmy morfizm

$$\widetilde{M_{2d}} \times_{Sh_{K_0}(L_d)} Sh_K(L_d) \longrightarrow Sh_{\mathcal{K}}(C(L_d))$$

nad $\mathbb{C}$, którego dziedzina jest skończonym (nie etale) nakryciem przestrzeni moduli K3-powierzchni (ze strukturą poziomu). W rzeczywistości, dzięki zastosowaniu *Galois descentu* możemy zdefiniować ten morfizm nad $\mathbb{Q}$, a własność przedłużenia modelu kanonicznego pozwala zdefiniować go nawet nad $\mathbb{Z}[1/2]$. Niestety, używając tak mocnej własności uniwersalnej tracimy kontrolę nad własnościami otrzymanego morfizmu. Z tego właśnie

[3]Istnieje pewna niezgodność notacji pomiędzy [Mad12] i [Mad13]. Mianowicie, w [Mad12] dane i rozmaitości Shimury bez indeksu 0 odnoszą się do grupy $G = GSp$, a te bez indeksu 0 do grupy $G = SO$. Natomiast w [Mad13] rozważane są rozmaitości Shimury dla grup $G = SO$ i indeks 0 nie występuje w ich notacji. Tutaj będziemy używali notacji rozmaitości Shimury z [Mad12], ale dodamy do niej L_d.

powodu potrzebujemy argumentacji z wykładów 11 i 12 opartej na deformacjach. Używając deformacji możemy sprawdzić potrzebne własności morfizmu w charakterystyce 0 i następnie zredukować wszystko modulo p.

14.05, *wykłada: Bartosz Naskręcki.*

Wykład 9. (**Hipoteza Tate'a dla K3-powierzchni o ograniczonej wysokości**)
Przed rozpoczęciem omawiania szczegółów z [Mad13] przedstawiamy ogólne podejście do hipotezy Tate'a. *Trudna sprawa* to dowód, że każdy $Gal(k^{sep}/k)-$niezmienniczy element z $H^2_{et}(X_{k^{sep}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ pochodzi od snopa odwracalnego. Niech $(X, \mathcal{L})$ będzie K3-powierzchnią nad ciałem skończonym z szerokim snopem odwracalnym $\mathcal{L}$. Wtedy oczekuje się, że rozmaitość abelowa Kugi-Satake A (której jeszcze nie zdefiniowaliśmy) istnieje po skończonym rozszerzeniu ciała definicji oraz, że wtedy:

$$P(X, \mathcal{L}) \subseteq \mathrm{End}(H^1_{et}(A_{k^{sep}}, \mathbb{Q}_\ell)),$$

gdzie $P(X, \mathcal{L})$ jest prymitywną kohomologią, to znaczy dopełnieniem ortogonalnym $c_1(\mathcal{L})$ w $H^2_{et}(X_{k^{sep}}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ względem formy dwuliniowej Poincare. Zatem konstrukcja Kugi-Satake przenosi charakteryzację i istnienie snopów odwracalnych na X w terminach działań grupy Galois w charakteryzację i istnienie endomorfizmów rozmaitości abelowych w terminach działań grupy Galois, a to ostatnie zagadnienie jest klasycznie znane. Następnie, jeśli nawet konstrukcja Kugi-Satake nie jest dostępna w charakterystyce dodatniej (lub jeśli jej własności są całkowicie nie znane), to można podjąć następujące "obejście" tego problemu przez charakterystykę 0: znajdź "dostatecznie dobre" podniesienie pary $(X, \mathcal{L})$ do charakterystyki 0, zastosuj konstrukcję Kugi-Satake nad $\mathbb{C}$ tak, aby zachować zgodność z podnoszonymi działaniami Galois i następnie zredukuj modulo p. Dla zwyczajnych powierzchnki K3 Nygaard [Nyg83] zrealizował taką strategię używając *podniesień kanonicznych* takich powierzchni. Następnie, Nygaard i Ogus w pracy [NO85] przedłużyli to postępowanie do K3-powierzchni, które nie są supersingularne, za pomocą *podniesień quasi-kanonicznych*, które nie są kanoniczne, ale posiadają dostatecznie dobre własności.

21.05, *wykłada: Bartosz Naskręcki.*

Wykład 10. (**Kanoniczny model całkowity rozmaitości Shimury typu K3**)
Na wykładzie 8 wprowadziliśmy konstrukcję Kugi-Satake za pomocą złożenia morfizmów i podniesień. Dla lepszego zrozumienia tej konstrukcji w charakterystyce dodatniej wykonamy każdy krok na poziomie całkowitym. W tym celu potrzebujemy całkowitych modeli kanonicznych dla $Sh_K(L_d)$ i $Sh_{K_0}(L_d)$, które zdefiniujemy na tym wykładzie. Niestety te rozmaitości Shimury są tylko zbliżone do tych z pracy Kisina, zatem będziemy potrzebowali następującej konstrukcji, która pozwoli nam uzyskać dowód [Mad12, Thm. 8.1]: Zanurzyć $L_d \subset \tilde{L}$ jako kraty kwadratowe, gdzie $\tilde{L}$ jest kratą samodualną nad $\mathbb{Z}_{(p)}$ (co da się zrobić dzięki [Mad12, Lemma 6.8][4]). Wtedy $G{:=}GSp(\tilde{L})$ definiuje[5] dane Shimury typu Hodge'a oraz $G_0{:=}SO(\tilde{L})$ definiuje takie dane typu abelowego. Zatem możemy zastosować wyniki Kisina (patrz wykłady 3 i 6), które dają nam modele całkowite $\mathcal{S}_{\bar{K}}$ i

[4]Ten lemat pokazuje taki fakt dla dowolnych krat. To stwierdzenie trywializuje się jeśli ograniczyć się do krat L_d zdefiniowanych jako podkraty w samodualnej kracie $N^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$ cf. [Mad13, 2.10].

[5]Potrzebujemy samodualności krat tylko w tym celu, aby zwarte podgrupy K_p były *hiperspecjalne*.

$\mathcal{S}_{\bar{K}_0}$ nad $\mathbb{Z}_{(p)}$ (przy tym pierwszy jest nakryciem Galois drugiego) cf. [Mad12, Thm. 4.4]. Teraz możemy zdefiniować skończone nakrycie nierozgałęzione $Z_{K^p}(\Lambda)$ nad $\mathcal{S}_{\bar{K}}$ ([Mad12, 6.13]) takie, że morfizm $Sh_K(L_d) \longrightarrow Sh_{\bar{K}}(\tilde{L})$ podnosi się kanonicznie do $Z_{K^p}(\Lambda)$ nad ciałem reflex $\mathbb{Q}$ ([Mad12, 6.15]). Teraz definiujemy (jak w [Mad12, Thm. 7.2]) kanoniczny model całkowity rozmaitości $Sh_K(L_d)$ jako domknięcie obrazu $Sh_K(L_d)$ w $Z_{K^p}(\Lambda)$ (z dodatkowymi komplikacjami, gdy p=2). W taki sam sposób definiujemy $\mathcal{S}_{\bar{K}_0}$. Zauważmy, że jesteśmy tutaj zainteresowani w szczególnych kratach L_d, ale argumentacja z tego wykładu stosuje się *verbatim* do wszystkich krat L sygnatury $(n,2)$, dla $n \geqslant 2$.

28.05, *wykłada: Wojtek Wawrów.*

Wykład 11. (**Deformacje endomorfizmów specjalnych**)
Łatwo sprawdzić, że specjalne morfizmy[6] podnoszą się do charakterystyki 0 wewnątrz przestrzeni $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}))$ moduli $2^{19}-$wymiarowych rozmaitości abelowych. Znacznie trudniej wykonać taką deformację wewnątrz modelu całkowitego $\mathcal{S}_{K_0}$ rozmaitości $Sh_{K_0}(L_D)$. Wykład będzie poświęcony dowodowi tego faktu [Mad12, Cor.8.11], który na mocy [Mad12, Prop.5.16] redukuje się do problemu deformacji prostych izotypowych w ustalonej przestrzeni liniowej. Ten nowy problem deformacyjny rozwiązujemy jak w [Mad12, Prop.5.18]. Zauważmy, że prawie cały podrozdział 5 pracy [Mad12] wykorzystuje rozmaitość typu Hodge'a $\mathcal{S}_{\bar{K}}$ stowarzyszoną z $GSp(\tilde{L})$ (lub dowolną samodualną kratą), a dopiero później wynik przenosimy na $\mathcal{S}_{K_0}$.

4.06, *wykłada: Wojtek Wawrów.*

Wykład 12. (**Morfizm $\widetilde{M_{2d}} \longrightarrow \mathcal{S}_{K_0}$ jest etale**)
Na poprzednim wykładzie dowiedzieliśmy się jak podnosić specjalne endomorfizmy w $\mathcal{S}_{K_0}$ [7] do charakterystyki 0. Tyle, że zamiast deformować je w rozmaitości Shimury chcemy dokonać deformacji w przestrzeni moduli $\widetilde{M_{2d}}$ powierzchni K3. Na początku wykażemy za [Mad13, 4.1-4.7], że morfizm periodu nad $\mathbb{C}$ (nazywany morfizmem Torreliego na wykładzie 8) ogranicza się do ciała *reflex* $\mathbb{Q}$, a następnie (na mocy własności przedłużania dowiedzionej przez Milnego) do morfizmu $\widetilde{M_{2d}} \longrightarrow \mathcal{S}_{K_0}$ nad $\mathbb{Z}[1/2]$.[8]

11.06, *wykłada: W.Gajda.*

Wykład 13. (**Hipoteza Tate'a dla p>2**)
Przy użyciu wyników z poprzednich wykładów przeprowadzimy dowód hipotezy Tate'a [Mad13, Thm. 4.17]. W szczególności, wykażemy, że konstrukcja Kugi-Satake zachowuje kluczowe własności także w przypadku dodatniej charakterystyki. Korzystając z tego zakończymy dowód hipotezy Tate'a w charakterystyce p>2, tak jak w [Mad13, 5.1-5.12]. W porównaniu do wykładu 8 nowe komplikacje pojawiają się z tego powodu, że potrzebujemy wielu różnych podniesień do charakterystyki 0 (zamiast jednego *kanonicznego*) tak,

[6] Jeśli nie zostało to zrobione podczas wykładu 8, podać różne alternatywne definicje [Mad12, 5.2, 5.3 i 5.8] i przedyskutować ich równoważność [Mad12, Cor. 5.21]

[7] W [Mad13] ta rozmaitość Shimury oznaczana jest symbolem $\mathcal{S}_K(L_D)$ lub $\mathcal{S}_K$.

[8] Na poprzednich wykładach pracowaliśmy nad $\mathbb{Z}_{(p)}$, dla dowolnego p>2 (lub na jego uogólnieniach dla większego ciała liczbowego). Zauważyć, że pociąga to istnienie kanonicznego modelu nad $\mathbb{Z}[1/2]$ ze wszystkimi potrzebnymi w dowodzie własnościami lub kontynuować pracę nad $\mathbb{Z}_{(p)}$, bo interesują nas tylko włókna nad $\mathbb{F}_p$ i nad $\mathbb{Q}$

aby zrealizować wszystkie klasy cykli. W rzeczywistości, hipoteza Tate'a przewiduje, że ranga Picarda supersingularnej powierzchni K3 wynosi 22, gdy ranga Picarda powierzchni K3 w charakterystyce 0 nie przekracza 20. Zatem nie możemy oczekiwać realizacji wszystkich cykli przy pomocy tylko jednego podniesienia.

18.06, *wykłada: W.Gajda.*

Literatura[9]

[**Huy**] D.Huybrechts, *Lectures on K3-surfaces*, dostępne na `www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3Global.pdf`

[**Kis10**] M.Kisin, *Integral models for Shimura varieties of abelian type*, JAMS 23 (4), pp. 967-1012, 2010.

[**Kis11**] M.Kisin: *Mod p points on Shimura varieties of abelian type*, JAMS 30 (3), pp. 819-914, 2017.

[**Kot91**] R.E.Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, JAMS 5 (2), pp. 373-444, 1991.

[**Mad12**] K.Madapusi Pera, *Integral canonical models for Spin Shimura varieties*, Compositio Math. 152 (4), pp. 769-824, 2016.

[**Mad13**] K.Madapusi Pera, *The Tate conjecture for K3-surfaces in odd characteristic*, Inventiones math. 201 (2), pp. 625-668, 2015.

[**Moo98**] B.Moonen, *Models of Shimura varieties in mixed characteristics,* 1998, dostępne na `www.math.ru.nl/personal/bmoonen/DOCS/SMCfinal.pdf`

[**NO85**] N.O.Nygaard, A.Ogus, *Tate's conjecture for K3-surfaces of finite height*, Annals of Math. 122 (3), pp. 461-507, 1985.

[**Nyg83**] N.O.Nygaard, *The Tate conjecture for ordinary K3-surfaces over finite fields*, Inventiones math. 74 (2), pp. 213-237, 1983.

[**Riz10**] J.Rizov, *Kuga-Satake abelian varieties of K3-surfaces in mixed characteristic*, J. Reine Angew. Math. 218, pp. 13-67, 2010.

[**Vas99**] A.Vasiu, *Integral canonical models of Shimura varieties of preabelian type*, Asian J. Math. 3 (2), pp. 401-518, 1999.

[**Zha13**] C.Zhang, *Ekedahl-Oort strata for good reductions of Shimura varieties of Hodge type*, `arXives 1312.4869.`

[9] Wszystkie pozycje z tego spisu dostępne są w bibliotece WMI UAM, na arXives lub na koncie dropbox SFARy.