U$_{\mathbf{A}}$M

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Wydział Matematyki
i Informatyki
ul. Umultowska 87
61–614 Poznań

Adam Mickiewicz University
Faculty of Mathematics
and Computer Science
telfax: + 48-61-8295313

Seminarium SFARA

Sumy Dedekinda

B1-37, czwartek, 14.00 - 15.30
Uczestnicy: B.Bzdęga, W.Gajda, J.Garnek,
K.Górnisiewicz i Ł.Nizio.

Wprowadzenie

Około roku 1880, badając własności funkcji

$$\eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \omega}),$$

Dedekind udowodnił następującą formułę:

$$\log \eta \left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d} \right) = \log \eta(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{c\omega + d}{i} + \pi i \frac{a+d}{12c} - \pi i s(d, c).$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$, natomiast $s(b, a)$ jest sumą Dedekinda. Definiujemy ją w następujący sposób:

$$s(h, k) = \sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{hj}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{j}{k} \right) \right), \quad \text{gdzie} \quad ((x)) = \begin{cases} \{x\} - \frac{1}{2} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

Dla liczb naturalnych względnie pierwszych h, k.

Sumy Dedekinda znalazły wiele ciekawych zastosowań. Oprócz formuł związanych z funkcją η, pojawiają się między innymi w dowodzie prawa wzajemności dla symbolu Jacobiego, zliczaniu punktów kratowych oraz partycji. Celem seminarium będzie omówienie własności arytmetycznych sum Dedekinda i ich uogólnienia – sum Fouriera-Dedekinda oraz wspomnianych wcześniej zastosowań.

Literatura

- H.Rademacher i E.Grosswald, *Dedekind Sums.*
- M.Beck i S.Robins, *Computing the Continuous Discretely.*

Program seminarium

Wykład 1. Wstęp. Prawo wzajemności dla sum Dedekinda. **19 marca**

Wykłada: J.Garnek.

Zaprezentowane zostaną dwa różne dowody prawa wzajemności:

$$s(h,k)+s(k,h) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{1}{hk}+\frac{k}{h}\right).$$

Pierwszy z nich polega na porównywaniu liczb punktów kratowych odpowiednich podzbiorów prostopadłościanu $h \times k \times hk$. Drugi wykorzystuje w naturalny sposób okresowość $\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)$, dzięki czemu można wyrazić tę wartość w postaci skończonego szeregu Fouriera $\sum_{m \mod k} a_m \xi_k^{jm}$, gdzie ξ_k jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia k z jedności.

Wykłady 2 i 3. Klasyczne zastosowania prawa wzajemności. **9 i 16 kwietnia**

Wykładają: J.Garnek i Ł.Nizio.

Udowodnione zostaną następujące twierdzenia:

- Twierdzenie o sumie ułamków w N-tym ciągu Fareya:
$$\sum_{p,q \leqslant N;\ (p,q)=1} \frac{p}{q} \quad \sim \quad \frac{9}{2\pi^2}N^2$$
- Prawo wzajemności dla symbolu Jacobiego:
$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}$$
dla m i n nieparzystych, względnie pierwszych.
- Twierdzenie Zołotariowa
$$(-1)^{I(m,n)} = \left(\frac{m}{n}\right),$$
gdzie $I(m,n)$ oznacza liczbę inwersji w ciągu $m, 2m, 3m, \ldots, (n-1)m$ modulo n.
(twierdzenie to prowadzi do innego dowodu prawa wzajemności dla symbolu Jacobiego)
- Twierdzenie Mordella: liczba punktów kratowych w czworościanie o wierzchołkach
$$(0,0,0), \quad (a,0,0), \quad (0,b,0), \quad (0,0,c),$$
gdzie a, b, c są naturalne i względnie pierwsze, wynosi
$$\frac{1}{6}abc+\frac{1}{4}(bc+ca+ab)+\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{1}{12}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{12abc}-2-s(bc,a)-s(ca,b)-s(ab,c).$$

Wykłady 4 i 5. Sumy Fouriera-Dedekinda i problem rozmiany. **23 i 30 kwietnia**

Wykłada: K.Górnisiewicz.

Sumą Fouriera-Dedekinda nazywamy wyrażenie

$$s_n(a_1, a_2, \ldots, a_m;\ b) = \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\xi_b^m}{(1-\xi_b^{ka_1})(1-\xi_b^{ka_2})\ldots(1-\xi_b^{ka_m})},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ są liczbami naturalnymi parami względnie pierwszymi, a ξ_b jest pierwotnym pierwiastkiem stopnia b z jedności. Są to w pewnym sensie uogólnienia sum Dedekinda, gdyż

$$s_0(a, 1;\ b) = -s(a, b) + \frac{b-1}{4b}.$$

Sumy te pojawiają się przy wyznaczaniu liczby sposobów rozmiany monety o nominale n na monety o nominałach ze zbioru $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Wynosi ona

$$P_A(n) = \mathtt{poly}_A(n) + \sum_{j=1}^{m} s_{-n}(a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_m;\ a_j),$$

gdzie $\mathtt{poly}_A(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia m, którego współczynniki łatwo policzyć, natomiast $\widehat{a_j}$ oznacza w tym miejscu, że wyraz a_j pomijamy.

Na wykładzie wykazana zostanie powyższa formuła oraz metoda wyznaczania współczynników wielomianu $\mathtt{poly}_A(n)$. Zostaną również sformułowane i udowodnione prawa wzajemności dla sum Fouriera-Dedekinda, między innymi prawo Zagiera

$$\sum_{j=1}^{m} s_0(a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_m;\ a_j) = 1 - \mathtt{poly}_A(0),$$

które jest prostym wnioskiem z powyższej formuły oraz prawo Rademachera

$$\sum_{j=1}^{m} s_n(a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_m;\ a_j) = -\mathtt{poly}_A(-n).$$

Wykład 6. Punkty kratowe i wielomiany cyklotomiczne. 7 maja

Wykłada: B.Bzdęga.

Metody z poprzedniego wykładu z powodzeniem stosuje się do wyznaczenia liczby punktów kratowych w sympleksie d-wymiarowym o wierzchołkach

$$(0, 0, \ldots, 0), \quad \left(\frac{n}{a_1}, 0, \ldots, 0\right), \quad \left(0, \frac{n}{a_2}, 0, \ldots, 0\right), \quad \ldots, \quad \left(0, \ldots, 0, \frac{n}{a_d}\right),$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_d$ są liczbami naturalnymi. Liczba ta, zgodnie z twierdzeniem Ehrharta, wyraża się pewnym quasiwielomianem

$$c_d(n)n^d + \ldots + c_1(n)n + c_0(n),$$

którego współczynniki zmieniają się okresowo w zależności od n. Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_d$ są parami względnie pierwsze, to współczynniki $c_1, \ldots, c_d$ są stałe i stosunkowo łatwo je obliczyć. Współczynnik $c_0(n)$ jest zawsze zmienny i wyraża się w terminach sum Fouriera-Dedekinda.

Przypadek w którym $a_1, a_2, \ldots, a_d$ nie są parami względnie pierwsze jest znacznie bardziej skomplikowany ze względu na to, że funkcja $\frac{1}{(1-z)(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\ldots(1-z^{a_d})}$ posiada wówczas bieguny rzędu większego niż 1 w punktach innych niż $z = 1$. Motywacją do rozważenia go (przynajmniej dla $d = 3$) jest poszukiwanie wzorów na współczynniki wielomianu cyklotomicznego Φ_{pqr}. Jeśli przez $\mathcal{P}(n)$ oznaczymy liczbę punktów kratowych w czworościanie o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(\frac{n}{qr}, 0, 0)$, $(0, \frac{n}{rp}, 0)$, $(0, 0, \frac{n}{pq})$, to n-ty współczynnik Φ_{pqr} wyraża się wzorem

$$a_{pqr}(n) = \sum_{u,v,w \in \{0,1\}} (-1)^{u+v+w} \mathcal{P}(n - up - vq - wr).$$

Wykłady 7 i 8. Sumy Dedekinda i równania modularne. **14 i 21 maja**

Wykłada: W.Gajda.

Wykazana zostanie tożsamość przedstawiona we wstępie:

$$\log \eta \left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d} \right) = \log \eta(\omega) + \frac{1}{2} \log \frac{c\omega + d}{i} + \pi i \frac{a+d}{12c} - \pi i s(d,c),$$

z której znów można łatwo wykazać prawo wzajemności sum Dedekinda.

Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det M = 1$. Określamy

$$\Phi(M) = \begin{cases} \frac{b}{d} & \text{dla } c = 0, \\ \frac{a+d}{c} - 12\mathrm{sgn}(c)s(d,|c|) & \text{dla } c \neq 0, \end{cases}$$
$$\Psi(M) = \Phi(M) - 3\mathrm{sgn}(c(a+d)).$$

Funkcja Φ jest użyteczna przy badaniu struktury grupy modularnej Γ i jej podgrup. Funkcja Ψ jest niezmiennicza na klasach podobieństwa w Γ:

$$\Psi(M) = \Psi(L^{-1}ML) \quad \text{dla } L, M \in \Gamma.$$

Podczas wykładu omówione będą niektóre własności funkcji Φ i Ψ oraz ich konsekwencje.

Przygotował Bartłomiej Bzdęga