Twierdzenia o aproksymacji

1 Aproksymacja dla norm

Załóżmy, że mamy na danym ciele określone parami nierównoważne, nietrywialne normy $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_n$ na tym samym ciele K. Można wtedy zadać pytanie o to, w jakim stopniu te waluacje są od siebie niezależne. Interpretując wielość $|a-b|_i$ jako miarę tego, jak blisko siebie są a i b, jest prawdziwe następujące twierdzenie:

Twierdzenie (1.1.3, Artin-Whaples)**.** *Dla dowolnych elementów $x_1, \ldots, x_n \in K$ możemy znaleźć elementy x które, dla każdego i, są dowolnie blisko x_i względem normy $|\cdot|_i$. Dokładniej, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ rzeczywistego istnieje x takie, że*

$$|x - x_i|_i < \varepsilon \qquad \textit{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Przykładowo, powiedzmy, że chcemy znaleźć takie x, że $|x-1|_3 < \varepsilon$, $|x+1|_5 < \varepsilon$ oraz $|x-1|_\infty < \varepsilon$. Rozważając elementy postaci $x = \frac{5^k - 3^k}{5^k + 3^k}$ dla odpowiednio dużego k nierówności te zostaną spełnione.

Proof. Najpierw wykażemy istnieje elementu a takiego, że $|a|_1 > 1$ oraz $|a|_j < 1$ dla $j \neq i$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Ponieważ $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ są nierównoważne, istnieją b, c takie, że

$$|b|_1 < 1, |b|_2 \geqslant 1$$
$$|c|_1 \geqslant 1, |c|_2 < 1$$

(w przeciwnym razie implikacja $|b|_1 < 1 \Rightarrow |b|_2 < 1$ lub przeciwna zachodzi, a to implikuje równoważność). Wtedy $a = b^{-1}c$ spełnia $|a|_1 > 1, |a|_2 < 1$ jak chcieliśmy.

Załóżmy teraz istnienie takiego elementu y, że $|y|_1 > 1$ oraz $|y|_i < 1$ dla $i = 2, \ldots, n-1$. Ponadto, wiemy, że istnieje z takie, że $|z|_1 > 1, |z|_n < 1$.

Jeżeli również zachodzi $|y|_n \leqslant 1$, to mamy $|zy^\nu|_1 < 1, |zy^\nu|_n > 1$ dla dowolnego $\nu \geqslant 1$, a ponadto, dla ν dostatecznie dużego oraz $i = 2, \ldots, n-1$,

$$|zy^\nu|_i = |z|_i |y|_i^\nu < 1$$

(gdyż $|y|_i < 1$). Zatem możemy wziąć $a = zy^\nu$.

Załóżmy zatem, że $|y|_n > 1$. Połóżmy

$$w_\nu = \frac{y^\nu}{1+y^\nu}.$$

Wtedy, jak łatwo sprawdzić

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} |w_\nu|_j &= 0 \text{ dla } j = 2, \dots, n-1,\\ \lim_{\nu\to\infty} |w_\nu|_j &= 1 \text{ dla } j = 1, n.\end{aligned}$$

W związku z tym mamy

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} |zw_\nu|_j &= 0 \text{ dla } j = 2, \dots, n-1,\\ \lim_{\nu\to\infty} |zw_\nu|_j &= |z|_j \text{ dla } j = 1, n,\end{aligned}$$

skąd mamy (przypominając, że $|z|_1 > 1, |z|_n < 1$), że $a = zw_\nu$ dla ν odpowiednio dużego spełnia odpowiednie nierówności.

Mając już a, spójrzmy na elementy postaci

$$b_\nu = \frac{a^\nu}{1+a^\nu}.$$

Tak jak wcześniej możemy sprawdzić, że $\lim_{\nu\to\infty} |b_\nu|_j = 0$ dla $j \neq 1$ oraz $\lim_{\nu\to\infty} |b_\nu - 1|_1 = 0$. Zatem dla dowolnego $\varepsilon_0 > 0$ istnieje element c_1 taki, że $|c_1 - 1|_1 < \varepsilon_0$ oraz $|c_1|_j < \varepsilon_0$ dla $j \neq 1$. W analogiczny sposób wykazujemy istnienie c_i takich, że

$$|c_i - 1|_i < \varepsilon_0 \text{ oraz } |c_i|_j < \varepsilon_0 \text{ dla } j \neq i.$$

Używając teraz nierówności trójkąta nietrudno sprawdzić, że $x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ będzie spełniał szukane nierówności gdy ε_0 będzie wybrane dostatecznie małe. □

Twierdzenie to mówi nam, jak bardzo różne są topologie indukowane przez nierównoważne normy. Dany ciąg elementów może mieć różne granice w każdej z indukowanych topologii.

2 Aproksymacja dla waluacji

Dla każdej waluacji rangi 1 możemy znaleźć normę która indukuje dokładnie tę samą topologię (z tw. 2.1.1 możemy założyć, że $\Gamma \leqslant \mathbb{R}$, i wtedy $e^{-v(x)}$ jest taką normą). Wobec tego z poprzedniego twierdzenia wynika następne w szczególnym przypadku, gdy wszystkie waluacje mają rangę 1.

Twierdzenie (2.4.1)**.** *Niech $\mathcal{O}_i \subseteq K, i = 1, \ldots, n$ będą niezależnymi pierścieniami waluacyjnymi i $v_i : K \to \Gamma_i \cup \{\infty\}$ odpowiadającymi in waluacjami. Wtedy dla dowolnych $a_i \in K$ oraz $\gamma_i \in \Gamma_i$ istnieje $x \in K$ takie, że*

$$v_i(x - a_i) > \gamma_i \text{ dla } i = 1, \ldots, n.$$

Twierdzenie to udowodnimy teraz w pełnej ogólności.

Proof. Wybierzmy $\delta_i \in \Gamma_i$ takie, że $\delta_i > \gamma_i, \delta_i > 0$ oraz $-\delta_i < v_i(a_j)$ dla wszystkich j. Wartości tych nie ustalamy, gdyż w trakcie dowodu będziemy musieli je „poprawiać".

Dla każdego i rozważmy następujące zbiory, otwarte w odpowiednich topologiach:

$$M_i = \{x \in K : 2\delta_i < v_i(x)\},$$
$$A_i = \{x \in K : -2\delta_i \leqslant v_i(x)\}.$$

Wykażemy, że δ_i mogą być wybrane tak, aby

$$M_1 \cap \bigcap_{j=2}^{n} (K \setminus A_j) \neq \varnothing.$$

Robimy to przez indukcję po n, znów zaczynając od $n = 2$. Jeżeli $M_1 \cap (K \setminus A_2) = \varnothing$, to $M_1 \subseteq A_2$. Biorąc $c_1 \in M_1, c_2 \in M_2$ mamy

$$(c_2 c_1)\mathcal{M}_1 = c_2(c_1 \mathcal{M}_1) \subseteq c_2 M_1 \subseteq c_2 A_2 \subseteq \mathcal{M}_2$$

czyli $a\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ dla $a = c_2 c_1$. Ale, jak zostało to udowodnione wcześniej, z tego zawierania wynika zależność $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Wobec tego $M_1 \cap (K \setminus A_2) \neq \varnothing$ niezależnie od wartości δ_1, δ_2.

Dla $n > 2$, przy danych δ_1, δ_2, wybierzmy $r \in M_1 \cap (K \setminus A_2)$. „Poprawmy" $\delta_3, \ldots, \delta_n$ powiększając je tak, aby $r \in A_j$ dla $j = 3, \ldots, n$. Z indukcji wiemy, że

$$M_1 \cap \bigcap_{j=3}^{n} (K \setminus A_j) \neq \varnothing,$$

więc możemy wybrać s należący do tego zbioru. Jeżeli $s \notin A_2$, to s jest szukanym elementem. Gdy $s \in A_2$, to $r + s$ jest: M_1 jest zamknięte ze względu na dodawanie, więc $r + s \in M_1$, oraz dokładnie jedno z r, s jest w $A_j, j = 2, \ldots, n$, więc $r + s \notin A_j$, bo A_j jest zamknięte ze względu na odejmowanie.

Podobnie, przy odpowiednim doborze δ_j zbiór

$$M_i \cap \bigcap_{j \neq i} (K \setminus A_j) \neq \varnothing.$$

Chcemy teraz wywnioskować, że dla pewnych δ_j wszystkie te przekroje są jednocześnie niepuste. Zauważmy, że zmniejszając δ_i zwiększamy wszystkie zbiory

$M_i, K \setminus A_j$, a więc i ich przekrój pozostanie niepusty. Wybierając więc δ_j jako najmniejszą spośród wartości tego elementu użytych do zagwarantowania niepustości przekrojów dostaniemy, że żaden z nich nie jest wtedy pusty.

Elementy zbioru $M_i \cap \bigcap_{j\neq i}(K \setminus A_j)$ są analogiczne do elementów a_i z dowodu 1.1.3: są one „małe” ze względu na na waluację v_i oraz „duże” ze względu na waluacje $v_j, j \neq i$.

Znajdziemy teraz elementy d_i które są „blisko 1” względem waluacji v_i oraz „blisko 0” względem waluacji $v_j, j \neq i$. Dokładniej, należeć ode będą do zbioru

$$(1 + M_i) \cap \bigcap_{j\neq i} M_j,$$

o którym pokażamy, że jest niepusty. Istotnie, należy do niego $\frac{1}{1+x}$ dla dowolnego $x \in M_i \cap \bigcap_{j\neq i}(K \setminus A_j)$: Ponieważ $x \in M_i$, mamy

$$\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x} \in 1 + M_i$$

gdyż $v_i\left(\frac{x}{1+x}\right) = v_i(x) - v_i(1+x) \geqslant 2\delta_i - 0 = 2\delta_i$, oraz, ponieważ $x \notin A_j$,

$$v_j\left(\frac{1}{1+x}\right) = -v_j(1+x) = -v_j(x) > 2\delta_j$$

więc $\frac{1}{1+x} \in M_i$.

Mając wreszcie $d_i \in (1 + M_i) \cap \bigcap_{j\neq i} M_j$, możemy położyć $x = a_1d_1 + \cdots + a_nd_n$. Ponieważ $v_i(d_i - 1), v_i(d_j) > 2\delta_i$ mamy

$$\begin{aligned} v_i(x - a_i) &= v_i(a_1d_1 + \cdots + a_i(d_i - 1) + \cdots + a_nd_n) \\ &> \min_{1\leqslant j\leqslant n}\{v_i(a_j) + 2\delta_i\} \geqslant -\delta_i + 2\delta_i = \delta_i \geqslant \gamma_i. \end{aligned} \qquad \square$$

3 Kontrprzykład dla lematu Hensela

W swojej najprostrzej postaci, lemat Hensela stwierdza co następuje:

Twierdzenie. *Niech $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ będzie waluacją rangi 1 względem której K jest domknięte. Jeżeli $f \in \mathcal{O}_v[X]$ ma pierwiastek pojedynczy w ciele reszt $\overline{K}_v$ (tzn. $\overline{f}(\overline{a_0}) = 0$ i $\overline{f}'(\overline{a_0}) \neq 0$), to f ma pierwiastek w K.*

Naturalnym jest podejrzewać, że twierdzenie to zachodzi również dla waluacji o wyższych rangach. Jak się okazuje, jest ono fałszywe już dla rangi 2: rozważmy waluację Y-adyczną v_Y na ciele $\mathbb{R}(Y)$. Jej grupą wartości jest $\mathbb{Z}$, które traktujemy jako podgrupę $\{0\} \times \mathbb{Z}$ grupy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ uporządkowanej leksykograficznie. Ponieważ $(\{0\} \times \mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z}(1, 0) = \{(0, 0)\}$, ze wcześniej udowodnionych faktów v_Y możemy przedłużyć do waluacji $w : \mathbb{R}(X, Y) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Ciałem reszt tej waluacji jest $\mathbb{R}$.

Rozważmy wielomian $f(Z) = Z^2 - (1 + Y)$. Ma on oczywiście pierwiastek jednokrotny $\overline{a_0} = 1$ w ciele reszt. Pokażemy jednak, że nie ma on pierwiastków w uzupełnieniu $K = \mathbb{R}(X, Y)$. Do tego wystarczy pokazać, że żaden ciąg $f(a_n), a_n \in K$ nie jest zbieżny do 0 (każdy element uzupełnienia jest granicą ciągu elementów z K), a do wykazania tego wystarczy, jeśli pokażemy, że $w(f(a)) < (1, 0)$ dla $a \in K$.

Aby pokazać tę nierówność, zauważmy, że w jest złożeniem waluacji X-adycznej v_X na ciele $K = k(X)$, gdzie $k = \mathbb{R}(Y)$ jest ciałem reszt, z waluacją v_Y na k. Waluację v_X możemy traktować jako mapę $K \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\{0\} \times \mathbb{Z}), a \mapsto v_X(a) = w(a) + (\{0\} \times \mathbb{Z})$. Wystarczy wykazać, że $v_X(a^2 - (1 + Y)) \leqslant 0$ dla wszystkich a, gdyż stąd wynika $w(a) < (1, 0)$ bo $(1, 0) > (0, n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $v_X(1 + Y) = 0$, z $v_X(a) < 0$ wynika $v_X(a^2 - (1 + Y)) < 0$. Jeżeli natomiast $v_X(a) \geqslant 0$, możemy $a^2 - (1 + Y)$ zredukować do ciała reszt $\mathbb{R}(Y)$. Ponieważ $1 + Y$ nie jest w tym ciele kwadratem, $\overline{a^2 - (1 + Y)}$ jest niezerowym elementem, zatem $a^2 - (1 + Y)$ musi mieć zerową waluację, jak chcieliśmy.

4 Ciągłość pierwiastków

Dla wielomianów o współczynnikach zespolonych pierwiastki są ciągłymi funkcjami współczynników wielomianu: jeżeli wielomiany $f_t \in \mathbb{C}$ dla zmiennego t mają stopień n i współczynniki są ciągłymi funkcjami t, to pierwiastki tych wielomianów możemy ponumerować $z_{t,1}, \ldots, z_{t,n}$, że $z_{t,i}$ jest funkcją ciągłą zmiennej t. Podobny fakt zachodzi dla ciał z waluacją - pierwiastki wielomianów zależą od współczynników w sposób ciągły. Formułujemy to następująco:

Twierdzenie. *Niech (K, v) będzie ciałem z waluacją, a*

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in K[X]$$

wielomianem o różnych pierwiastkach $x_1, \ldots, x_n$ w K. Dla każdego $\alpha \in v(K)$ istnieje $\gamma \in v(K)$ takie, że gdy dla $y_1, \ldots, y_n \in K$ oraz

$$g(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - y_i) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

zachodzi $v(a_i - b_i) > \gamma$ dla $i = 0, \ldots, n - 1$, to dla dowolnego x_i istnieje y_j takie, że $v(x_i - y_j) > \alpha$. Ponadto, gdy $\alpha \geqslant \max_{i \neq j} v(x_i - x_j)$, to takie y_j jest jednoznacznie wyznaczone.

Proof. Jedyność y_j przy dodatkowym założeniu wynika szybko z nierówności z definicji waluacji, więc wykażemy tylko istnienie.

Możemy bez straty ogólności założyć, że nierówność $\alpha \geqslant \max_{i \neq j} v(x_i - x_j)$ zachodzi (jeśli znajdziemy odpowiednie γ, będzie ono też działać dla wszystkich mniejszych α). Oznaczmy $\beta = \min\{v(x_j)\}$. Mamy wtedy

$$\alpha \geqslant v(x_i - x_j) \geqslant \min\{v_(x_i), v_(x_j)\} \geqslant \beta.$$

Wybierzmy dowolne $\gamma > \max\{n\alpha, n(\alpha-\beta)\}$. Jeżeli $v(y-x_j) \leqslant \alpha$ dla wszystkich j, to

$$v(f(y)) = \sum_{j=1}^{n} v(y - x_j) \leqslant n\alpha.$$

Jeśli równocześnie $g(y) = 0$ oraz $v(y) \geqslant 0$, to

$$\begin{aligned} v(f(y)) = v(f(y) - g(y)) = v\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - b_k)y^k\right) \\ \geqslant \min\{v(a_k - b_k) + kv(y)\} > \gamma, \end{aligned}$$

co jest sprzeczne z $\gamma > n\alpha$. Jeżeli natomiast $g(y) = 0$ i $v(y) < 0$, to patrzymy na

$$\begin{aligned} f(y)y^{-n} &= a_0 y^{-n} + \cdots + a_{n-1}y + 1, \\ g(y)y^{-n} &= b_0 y^{-n} + \cdots + b_{n-1}y + 1, \end{aligned}$$

które są wielomianami w y^{-1} i y jest pierwiastkiem drugiego z nich. Podobnie jak wcześniej dostajemy $v(f(y)y^{-n}) > \gamma$. Z drugiej strony $v(f(y)y^{-n}) = v(f(y)) - nv(y) \leqslant n\alpha - nv(y)$. Zatem

$$n(\alpha - \beta) < \gamma < v(f(y)y^{-n}) \leqslant n\alpha - nv(y),$$

więc $v(y) < \beta = \min\{v(x_j)\}$. Z tego wynika, że $v(y - x_j) = v(y)$, więc

$$v(f(y)) = \sum_{j=1}^{n} v(y - x_j) = nv(y).$$

Mamy jednak

$$n(\alpha - \beta) < \gamma < v(f(y)y^{-n}) = v(f(y)) - nv(y) = 0,$$

co jednak przeczy nierówności $\alpha \geqslant \beta$ wykazanej wcześniej.

Wobec tych sprzeczności, jeśli $g(y) = 0$, to $v(y-x_j) > \alpha$ dla pewnego j. $\square$