

## Zadania domowe Zestaw 1.<sup>1</sup>

### DATL 410

Wiosna 2014

wykładowca: prof. Wojciech Gajda

#### Zadanie 1.

Dowieść, że następujące pierścienie nie są DJR znajdując dwa różne rozkłady tego samego elementu.

(a)  $\mathbf{Z}[\sqrt{10}]$  (**Wsk.:** Rozłóż 6 na iloczyny elementów nierozkładalnych.)

(b)\*  $\mathbf{Z}[\sqrt{-13}]$

#### Zadanie 2.

Wykazać, że następujące pierścienie są dziedzinami Euklidesa (i w konsekwencji są DJR).

(a)  $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$  (**Wsk.:** Dla  $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ , gdzie  $y \neq 0$ , niech  $x/y = a + b\sqrt{-2}$  dla  $a, b \in \mathbf{Q}$ . Wybrać  $q = c + d\sqrt{-2}$  w ten sposób, aby  $|c - a| \leq 1/2$  oraz  $|d - b| \leq 1/2$ .)

(b)  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  (**Wsk.:** Wykorzystać własności normy  $N(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$ .)

#### Zadanie 3.

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równania Bacheta  $x^3 - y^2 = 2$ .

#### Zadanie 4.

Wykazać, że każde ciało stopnia dwa nad  $\mathbf{Q}$  (ciało liczbowe kwadratowe) jest postaci  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  dla pewnej liczby całkowitej  $d$  wolnej od kwadratów. Podać przykład ciała stopnia trzy (ciało liczbowe sześcienne) nad  $\mathbf{Q}$ , które nie jest postaci  $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{d})$  dla  $d \in \mathbf{Z}$ .

#### Zadanie 5.

Wyznaczyć pierścień liczb całkowitych  $\mathcal{O}_K$  i grupę jedności  $\mathcal{O}_K^\times$  ciała kwadratowego  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$  dla wszystkich  $d$  całkowitych i ujemnych.

---

<sup>1</sup>Rozwiązania tych zadań proszę przekazać mi przed następnym wykładem, to jest do godziny 10.00, 10 marca 2014