

Zestaw 2¹

Zadanie 1. Niech d będzie liczbą całkowitą wolną od kwadratu i niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że ideał główny $(p) = p\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ jest ideałem pierwszym pierścienia $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, wtedy i tylko wtedy, gdy klasa reszt $\bar{d}$ modulo p nie jest kwadratem w grupie $\mathbf{F}_p^\times$.

Zadanie 2. Niech $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ i niech $I = (2, 1 + \sqrt{-3})$.

- (a) Pokazać, że $I \neq (2)$ oraz, że $I^2 = 2I$. Czy pierścień R ma własność *JRP*?
- (b) Dowieść, że I jest jedynym ideałem pierwszym z R , który zawiera ideał główny (2) . Czy ideał (2) ma rozkład na iloczyn potęg ideałów pierwszych z R ?
- (c) Czy połączenie odpowiedzi na pytania (a) i (b) stanowi zaprzeczenie twierdzenia Dedekinda z poprzedniego wykładu?

Zadanie 3. Niech R będzie dziedziną całkowitości, która jest pierścieniem Noether. Niech K oznacza ciało ułamków pierścienia R . Dowieść, że R -podmoduł $I \subset K$ jest skończenie generowany, wtedy i tylko wtedy, gdy w R istnieje niezerowy element a taki, że $aI \subset R$.

Zadanie 4. (*"Pic(R) w inny sposób"*) Niech R będzie pierścieniem Dedekinda. Niech $G(R)$ oznacza zbiór klas abstrakcji $[I]_\sim$ następującej relacji: dwa niezerowe ideały I i $J \subset R$ są w relacji $\sim$ jeżeli istnieją różne od zera elementy $a, b \in R$ takie, że $aI = bJ$. Sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności.

- (a) Dowieść, że jeśli $I \sim J$ oraz $I' \sim J'$, to $II' \sim JJ'$. Wywnioskować z tego, że mnożenie ideałów wprowadza strukturę grupy abelowej na zbiorze klas $G(R)$.
- (b) Dowieść, że $G(R) \simeq \text{Pic}(R)$.

Zadanie 5. Dowieść, że jeżeli w pierścieniu Dedekinda R istnieje tylko skończenie wiele ideałów pierwszych, to R jest dziedziną ideałów głównych. (**Wsk.** Niech $\text{Spec } R = \{\wp_1, \wp_2, \dots, \wp_n\}$. Za pomocą twierdzenia chińskiego o resztach dowieść, że w R istnieją $\alpha_1 \in \wp_1, \alpha_2 \in \wp_2, \dots, \alpha_n \in \wp_n$ takie, że dla każdego $1 \leq i \leq n$ mamy $\alpha_i \notin \wp_i^2$ oraz $\alpha_i \notin \wp_j$, gdy $i \neq j$.)

Zadanie 6. (*Ideały w pierścieniach Dedekinda są dwugenerowane.*) Niech I będzie ideałem w pierścieniu Dedekinda R . Dowieść, że istnieją elementy $\alpha, \beta \in I$ takie, że $I = (\alpha, \beta)$. (**Wsk.** - jeśli "za trudne". Niech $\alpha \in I$ będzie dowolnym elementem takim, że $\alpha \neq 0$. Rozpiszmy $I = \prod \wp_i^{a_i}$. Dowieść, że $(\alpha) = \prod \wp_i^{b_i} \prod q_j^{c_j}$ dla pewnych ideałów pierwszych $\wp_i, q_j$ oraz liczb całkowitych $b_i \geq a_i, c_j \geq 1$. Korzystając z twierdzenia chińskiego o resztach dowieść, że istnieje $\beta \in R$ takie, że dla każdego i mamy $\beta \in \wp_i^{a_i}, \beta \notin \wp_i^{a_i+1}$ oraz $\beta \notin q_j$ dla $j \neq i$.)

¹Rozwiązując zadania należy korzystać z notatek z wykładu i ćwiczeń. Współpraca jest dopuszczalna, a nawet zalecana, jednakże rozwiązania powinny być opisane samodzielnie i własnymi słowami.