Zadania domowe prof. Wojciech Gajda
DATL 410
Wiosna 2014 termin składania rozwiązań: 7.04.2014

Zestaw 3 [1]

Zadanie 1.
Niech F i K będą ciałami kwadratowymi. Dowieść, że F i K są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy Δ_F=Δ_K.

Zadanie 2. W pierścieniu $R = \mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ rozłożyć ideały główne (2), (3), (7) i (29) na iloczyny ideałów pierwszych. Obliczyć grupę klas ideałów pierścienia R.

Zadanie 3.

(a) Niech $K = \mathbf{Q}(\alpha)$, gdzie α jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 2x - 2$. Dowieść, że $[K : \mathbf{Q}] = 3$ oraz, że $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\alpha]$. Wykazać, że $h_K = 1$.

(b) Wyznaczyć grupy klas ideałów pierścieni $\mathbf{Z}[\sqrt{-14}]$ oraz $\mathbf{Z}[\sqrt{-21}]$ wzorując swój rachunek na przykładach z wykładu.

Wskazówka. W zadaniach tego zestawu można skorzystać z twierdzenia Minkowskiego, które zostanie dowiedzione na wykładzie: *Niech K będzie ciałem liczbowym stopnia n. W każdej klasie ideałów z $Cl(\mathcal{O}_K)$ istnieje ideał niezerowy, którego norma jest nie większa od* $M_K = \frac{n!}{n^n}(\frac{4}{\pi})^{r_2}\sqrt{|\Delta_K|}$, gdzie r_2 oznacza połowę liczby zanurzeń urojonych ciała K. Przy tym stopień ciała $[K : \mathbf{Q}] = r_1+2r_2$, gdzie r_1 oznacza liczbę zanurzeń rzeczywistych.

Zadanie 4. Niech K będzie ciałem liczbowym i Δ=$\Delta_{K/\mathbf{Q}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, gdzie $\alpha_i \in \mathcal{O}_K$.

(a) Dowieść, że $\Delta \equiv 0$, 1 mod 4. W szczególności, wyróżnik ciała $\Delta_K \equiv 0, 1$ mod 4.

(b) Dowieść, że $sgn(\Delta_K)$=$(-1)^{r_2}$.

Wskazówka do (a). Wyznacznik macierzy $[\sigma_i(\alpha_j)]$ jest sumą $n!$ składników, po jednym składniku dla każdej permutacji z S_n. Niech P (odpowiednio, N) oznacza sumę tych składników, które odpowiadają permutacjom parzystym (odp., nieparzystym). Przy tych oznaczeniach d=$(P-N)^2$. Dowieść na początek, że P+N, $PN \in \mathbf{Z}$.

Zadanie 5. (*wyznaczanie bazy całkowitej*)
Niech K będzie ciałem liczbowym stopnia n, niech α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathcal{O}_K$ będą liniowo niezależne nad $\mathbf{Q}$ i niech $\Delta := \Delta_{K/\mathbf{Q}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ wybieramy najmniejszą liczbę naturalną d_{ii} taką, że dla pewnych $d_{ij} \in \mathbf{Z}$ liczba $w_i := \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{i} d_{ij}a_j$ należy do $\mathcal{O}_K$. Wykazać, że układ (w_1, w_2, ..., w_n) stanowi bazę całkowitą pierścienia $\mathcal{O}_K$.

Zadanie 6. (*wyznaczanie bazy całkowitej*)
Wykazać, że jeśli K jest ciałem liczbowym stopnia n i α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathcal{O}_K$ są liniowo niezależne nad $\mathbf{Q}$, to istnieje baza całkowita (w_1, w_2, ..., w_n) pierścienia $\mathcal{O}_K$ taka, że $\alpha_j = b_{j1}w_1 + b_{j2}w_2 + \ldots + b_{jj}w_j$, dla pewnych $b_{ij} \in \mathbf{Z}$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.

[1] Rozwiązując zadania należy korzystać z notatek z wykładu i ćwiczeń. Współpraca jest dopuszczalna, a nawet zalecana, jednakże rozwiązania powinny być opisane samodzielnie i własnymi słowami.