Zadania domowe prof. Wojciech Gajda
DATL 410
Wiosna 2014 termin składania rozwiązań: 19.05.2014

Zestaw 5 [1]

Grupa jedności i twierdzenie Dirichleta

Zadanie 1. Niech K będzie ciałem liczbowym.

(a) Niech $\alpha \in K$ będzie pierwiastkiem wielomianu unormowanego $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ oraz niech $f(r) = \pm 1$ dla pewnego $r \in \mathbf{Z}$. Wykazać, że wtedy $\alpha - r \in \mathcal{O}_K^{\times}$.

(b) Niech m będzie liczbą całkowitą wolną od sześcianu. Wyróżnik ciała $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})$ wynosi $\Delta_K = -27m^2$. Wykorzystać ten fakt i lemat z wykładu do wyznaczenia jedności podstawowej ciała $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{7})$.

(c) To samo zadanie co w (b) dla ciała $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{3})$.

Zadanie 2.

(a) Wykazać, że liczba $1 - \xi_m$ jest jednością ciała cyklotomicznego $\mathbf{Q}(\xi_m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy m nie jest potęgą liczby pierwszej.

(b) Niech $K = \mathbf{Q}(\xi_p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Wykazać, że $\mathbf{Z}[\xi_p + \xi_p^{-1}]$ jest pierścieniem liczb całkowitych ciała $\mathbf{Q}[\xi_p + \xi_p^{-1}]$.

(c) Wykazać, że grupa jedności $\mathcal{O}_K^{\times}$ jest sumą prostą grupy cyklicznej generowanej przez ξ_p i grupy jedności pierścienia $\mathbf{Z}[\xi_p + \xi_p^{-1}]$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli ranga grupy jedności ciała liczbowego $\mathcal{O}_K^{\times}$ jest równa jeden, to $[K : \mathbf{Q}] \in \{2, 3, 4\}$.

Zadanie 4. Niech $K = \mathbf{Q}(\sqrt{223})$.

(a) Obliczyć grupę jedności $\mathcal{O}_K^{\times}$ i grupę klas $Cl(\mathcal{O}_K)$.

(b) Które z równań diofantycznych: $X^2 - 223Y^2 = \pm 11$, $X^2 - 223Y^2 = \pm 11^2$, $X^2 - 223Y^2 = \pm 11^{19}$ ma rozwiązania całkowite ?

Zadanie 5. Wybierzmy bazę $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r_1+r_2-1}$ grupy $\mathcal{O}_K^{\times}/W_K$ i niech $M \in M_{r_1+r_2-1, r_1+r_2}(\mathbf{R})$ będzie macierzą, której j-ty wiersz równy jest:

$$(\log|\sigma_1(\epsilon_j)|, \dots, \log|\sigma_{r_1}(\epsilon_j)|, 2\log|\tau_1(\epsilon_j)|, \dots, 2\log|\tau_{r_2}(\epsilon_j)|).$$

Niech M' oznacza macierz, która powstaje z M po usunięciu jednej kolumny. Wykazać, że liczba $|\det(M')|$ nie zależy od tego którą kolumnę usunięto z M i więcej, że jest to różna od zera liczba rzeczywista zależna tylko od ciała liczbowego K. Liczbę $|\det(M')|$ nazywamy *regulatorem ciała K*. **Wskazówka:** Wykorzystaj to, że współrzędne każdej kolumny sumują się do zera.

[1] Rozwiązując zadania należy korzystać z notatek z wykładu i ćwiczeń. Współpraca jest dopuszczalna, a nawet zalecana, jednakże rozwiązania powinny być opisane własnymi słowami.

Zadanie 6. Niech d będzie wolną od kwadratu liczbą naturalną.

(a) Wykazać, że jeśli istnieją liczby całkowite x i y takie, że $x^2 - dy^2 = -1$, to każdy nieparzysty dzielnik pierwszy liczby d przystaje do 1 modulo 4. Sprawdzić na przykładzie dla $d = 34$, że odwrotne twierdzenie jest fałszywe.

(b)* Niech $p \neq 2$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że:

$x^2 - py^2 = 2$ ma rozwiązanie całkowite, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 7 \bmod 8$

$x^2 - py^2 = -2$ ma rozwiązanie całkowite, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 3 \bmod 8$.

Zadania dodatkowe

Zadanie 7.
Wykazać, że grupy multyplikatywne $\mathbf{Q}(\sqrt{2})^\times$ i $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})^\times$ są izomorficzne.

Zadanie 8.
Obliczyć grupy jedności $\mathcal{O}_K^\times$ ciał liczbowych $K = \mathbf{Q}(\sqrt{19})$ i $K = \mathbf{Q}(\sqrt{229})$.

Zadanie 9*

(a) Znaleźć rozkłady liczb $\sqrt{6}$ i $\sqrt{23}$ na ułamek łańcuchowy. Obliczyć jedności podstawowe ciał kwadratowych $K = \mathbf{Q}(\sqrt{6})$ oraz $K = \mathbf{Q}(\sqrt{23})$.

(b) Wykazać, że $[d, \overline{2d}]$ stanowi rozkład liczby $\sqrt{d^2+1}$ na ułamek łańcuchowy, dla każdego $d \in \mathbf{Z}$.

(c) Wykazać, że jeżeli d^2+1 jest wolna od kwadratu oraz $d \equiv 2, 3 \bmod 4$, to jednością podstawową ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{d^2+1})$ jest $d+\sqrt{d^2+1}$. Wyznaczyć jedności podstawowe ciał: $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{10})$ i $\mathbf{Q}(\sqrt{26})$.

(d) Wykazać, że $[d, \overline{d, 2d}]$ stanowi rozkład liczby $\sqrt{d^2+2}$ na ułamek łańcuchowy.

(e) Wykazać, że jeżeli d^2+2 jest wolna od kwadratu, to jednością podstawową ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{d^2+2})$ jest $d^2+1+d\sqrt{d^2+2}$, dla każdego $d \in \mathbf{Z}$. Wyznaczyć jedności podstawowe ciał: $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{11})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{51})$ i $\mathbf{Q}(\sqrt{66})$.

Zadanie 10*
Niech R_K będzie regulatorem ciała liczbowego K, który wprowadziliśmy w Zadaniu 5. Wykazać, że objętość $vol(H/L(\mathcal{O}_K^\times))$ dla kraty$L(\mathcal{O}_K^\times)$ zawartej w przestrzeni

$$H = \{x \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} : x_1+x_2+\ldots+x_{r_1+r_2} = 0\}$$

równa się $\sqrt{r_1+r_2}R_K$.