Zadania domowe prof. Wojciech Gajda
DATL 410
Wiosna 2014 termin składania rozwiązań: 9.06.2014

Zestaw 6 [1]

Zadanie 1.
Niech A będzie dziedziną całkowitości, a $S \subset A$ podzbiorem multyplikatywnym.

(a) Wykazać, że każdy ideał w pierścieniu $S^{-1}A$ jest postaci $S^{-1}I$ dla pewnego ideału I z pierścienia A.

(b) Niech $g : A \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem pierścieni z jedynką takim, że $g(s) \in B^{\times}$ dla każdego $s \in S$. Wykazać, że istnieje jednoznacznie określony homomorfizm pierścieni z jedynką $h : S^{-1} \longrightarrow B$ taki, że $g = h\ f$, gdzie $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ oznacza zanurzenie kanoniczne pierścienia w lokalizację.

Zadanie 2. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda oraz niech S będzie skończonym zbiorem ideałów pierwszych, niezerowych z R.

(a) Wykazać, że $R^{\times} = \bigcap_{\wp} R_{\wp}^{\times}$

(b) Wykazać dokładność następującego naturalnego ciągu homomorfizmów grup:

$$1 \longrightarrow R^{\times} \longrightarrow (R^S)^{\times} \longrightarrow \bigoplus_{\wp \in S} K^{\times}/R_{\wp}^{\times} \longrightarrow Cl(R) \longrightarrow Cl(R^S) \longrightarrow 1$$

oraz, że $K^{\times}/R_{\wp}^{\times} \cong \mathbf{Z}$ dla każdego $\wp \in S$.

(c) Niech $R = \mathcal{O}_K$, gdzie K jest ciałem liczbowym. Wyprowadzić (z (b) i z twierdzenia Dirichleta o jednościach) izomorfizm grup multyplikatywnych:

$$(R^S)^{\times} \cong W_K \times \mathbf{Z}^{|S|+r_1+r_2-1}.$$

Zadanie 3. Niech $\bar{\mathbf{Q}}$ oznacza ustalone domknięcie algebraiczne ciała liczb wymiernych. Niech G będzie podgrupą grupy multyplikatywnej $\bar{\mathbf{Q}}^{\times}$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne.

(a) G jest skończenie generowana.

(b) $G \subset (\mathcal{O}_K^S)^{\times}$ dla pewnego ciała liczbowego K i pewnego skończonego zbioru S ideałów pierwszych, niezerowych pierścienia $\mathcal{O}_K$.

[1] Rozwiązując zadania należy korzystać z notatek z wykładu i ćwiczeń. Współpraca jest dopuszczalna, a nawet zalecana, jednakże rozwiązania powinny być opisane własnymi słowami.

Zadanie 4. Niech $\zeta_{\mathbf{Q}}(s)$ będzie funkcją dzeta Riemanna i niech $\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)$ oznacza funkcję dzeta Dedekinda ciała liczb wymiernych Gaussa.

(a) Wykazać, że

$$\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) = \sum_{a,b\in\mathbf{Z},\, a\geqslant 0,\, b>0} \frac{1}{(a^2+b^2)^s}$$

dla $s \in \mathbf{C}$ i $\Re(s) > 1$.

(b) Wykazać, że

$$\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s) = (1-\frac{1}{2^s})^{-1} \prod_{p\equiv 1 \,\mathrm{mod} 4} (1-\frac{1}{p^s})^{-1} \prod_{p\equiv 3 \,\mathrm{mod} 4} (1-\frac{1}{p^{2s}})^{-1}$$

dla $s \in \mathbf{C}$ i $\Re(s) > 1$.

(c) Niech χ oznacza charakter (symbol Legendra), który na liczbie pierwszej p przyjmuje wartość: $\chi(2) = 0$, $\chi(p) = 1$ jeśli $p \equiv 1 \bmod 4$, oraz $\chi(p) = -1$ jeśli $p \equiv 3 \bmod 4$. Wykazać, że:

$$\frac{\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)}{\zeta_{\mathbf{Q}}(s)} = \prod_p (1-\frac{\chi(p)}{p^s})^{-1} = \sum_{n=1,\,\mathrm{odd}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} n^{-s}$$

dla $s \in \mathbf{C}$ i $\Re(s) > 1$.

(d) Korzystając tylko z (c) sprawdzić poprawność wzoru z twierdzenia 11.3 na residuum funkcji $\zeta_{\mathbf{Q}(i)}(s)$ w punkcie $s = 1$.

Zadanie 5* Niech $\mathbf{F}_q$ będzie ciałem skończonym q-elementowym. Oznaczmy przez $\zeta_{\mathbf{F}_q[t]}(s)$ funkcję dzeta pierścienia $\mathbf{F}_q[t]$:

$$\zeta_{\mathbf{F}_q[t]}(s) = \sum_{I\neq 0} \frac{1}{N(I)^s},$$

gdzie I przebiega wszystkie ideały niezerowe z $\mathbf{F}_q[t]$, norma $N(I) = [\mathbf{F}_q[t] : I]$ oraz $\Re(s) > 1$. Wykazać, że $\zeta_{\mathbf{F}_q[t]}(s) = \frac{1}{1-q^{1-s}}$. Wyznaczyć funkcję dzeta pierścienia ilorazowego $\mathbf{F}_q[x,y]/(x^2+y^2+1)$. **Wskazówka.** Wykazać na początek, że stożkowa x^2+y^2+1 jest izomorficzna z prostą rzutową nad ciałem $\mathbf{F}_q$

Zadanie 6. (*Dwa proste równania diofantyczne*)

(1) Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach naturalnych równania:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}.$$

(2) Rozwiązać równanie diofantyczne: $x + y + z + xy + yz + xz + xyz = 2014$, gdzie $1 < x < y < z$ są liczbami całkowitymi.

(3) Rozwiązać podobne zadanie do (b) z 2009 zamiast 2014 po prawej stronie równania.