O matematyce profesora Zdzisława Krygowskiego

Na dorobek naukowy profesora Zdzisława Krygowskiego składa się dwadzieścia jeden opublikowanych prac matematycznych, trzy podręczniki akademickie i dziewięć prac popularyzujących matematykę. Większość wyników naukowych Krygowskiego dotyczy zagadnień szeroko pojętej teorii funkcji eliptycznych i (ogólniejszej) teorii funkcji abelowych i funkcji theta. Od momentu powstania (w wyniku prac Nielsa Abela i Carla Gustava Jacobiego) do czasów nam współczesnych, teoria funkcji abelowych i funkcji theta stanowi jeden z kluczowych działów matematyki, który dzisiaj lokuje się na pograniczu analizy zespolonej, teorii liczb i geometrii algebraicznej. Można wytyczyć ciągłą linię w historii rozwoju badań matematycznych poczynając od prac Eulera i Gaussa o całkach i funkcjach eliptycznych, a kończąc na wynikach Andre Weila, Goro Shimury, Jean-Pierre Serre'a i Andrew Wilesa o krzywych eliptycznych, rozmaitościach abelowych i równaniach diofantycznych. Problematyka i rezultaty pracy naukowej profesora Krygowskiego znajdują się w środku tak wytyczonej linii rozwoju, w najbliższym sąsiedztwie najważniejszych problemów tej dziedziny na przełomie wieków XIX i XX. W okresie najaktywniejszej działalności naukowej Krygowskiego, to jest w latach 1894-1909, wspomniane teorie znajdowały się w centrum zainteresowania najlepszych matematyków tamtych czasów: Karla Weierstrassa, Felixa Kleina, Émila Picarda, Paula Appella i Henri Poincare.

Jak zwyczaj każe, przy opisywaniu dorobku uczonego bierzemy pod uwagę trzy niezbędne cechy *dobrej roboty* w nauce:

- wysoki poziom merytoryczny badań w zestawieniu z istniejącym w danym czasie stanem wiedzy w uprawianej dziedzinie,
- zaangażowanie w proces kształenia młodego pokolenia, a w szczególności w tworzenie nowego pokolenia badaczy,
- służbę i poświęcenie w pracy na rzecz lokalnego środowiska akademickiego i naukowego.

Naszym celem w tym opracowaniu jest opis wyników pracy naukowej profesora Zdzisława Krygowskiego, która niewątpliwie posiadała pierwszą z wymienionych cech. Szczegółowe omówienie poza naukowych aspektów działalności profesora pozostawimy do wykonania w innym miejscu. Tutaj zwrócimy uwagę czytelnika tylko na dwa wybrane fakty, które dobrze ilustrują inne zasługi Krygowskiego. Po pierwsze, wśród wielu studentów matematyki, którzy w okresie międzywojennym byli wychowankami profesora Krygowskiego znajdowała się *trójka poznańskich kryptologów*. Rejewski, Różycki i Zygalski na wykładach profesora Krygowskiego (z algebry, analizy i geometrii) zdobywali umiejętności matematyczne, które okazały się kluczowe przy łamaniu systemu kodowaniu *Enigma*. Z tytułu pracy magisterskiej Rejewskiego (*Funkcje podwójnie peryodyczne stopnia drugiego i trzeciego z zastosowaniami*), można przypuszczać, że w jego przypadku ważnym elementem edukacji matematycznej były seminaria Krygowskiego o funkcjach abelowych. Po drugie, pisząc o służbie dla środowiska lokalnego należy pamiętać, że Zdzisław Krygowski był pierwszym profesorem zwyczajnym nauk matematycznych zatrudnionym na nowo utworzonym Uniwersytecie Poznańskim w 1919 roku. Krygowski wprowadził nowoczesne badania matematyczne do kanonu działań podjętych w tamtym czasie na uniwersytecie w Poznaniu, organizując pierwszą katedrę przedmiotu i aktywnie uczestnicząc w pracach administracji młodej uczelni (na różnych jej szczeblach - w tym na stanowisku prorektora) przez cały okres międzywojenny, aż do przejścia w stan spoczynku w 1937 roku.

Pierwsza część naszego opracowania zawiera krótki wstęp do problematyki badawczej, którą zajmował się Krygowski, napisany z myślą o czytelniku współczesnym. Wprowadzamy podstawowe pojęcia i fakty z teorii funkcji abelowych i funkcji theta, które są niezbędne dla zrozumienia omawianych wyników naukowych. Dla uproszczenia przyjęliśmy przy tym formę opisu wolnego od precyzyjnych odwołań do literatury przedmiotu. Czytelnikowi głębiej zainteresowanemu omawianą tutaj teorią, polecamy dołączony spis bibliografii, który został uporządkowany według daty opublikowania (pierwszego wydania, w przypadku książki). W drugiej części opracowania zamieściliśmy szczegółowy opis wyników uzyskanych w pracach profesora Zdzisława Krygowskiego.

Serdecznie dziękuję profesor Magdalenie Jaroszewskiej, bez której

entuzjazmu i zaangażowania w pracę edytorską i przy zbieraniu materiałów archiwalnych, tom prac profesora Zdzisława Krygowskiego nie mógłby powstać. Profesorom Jerzemu Kaczorowskiemu i Julianowi Musielakowi dziękuję za cenne uwagi dotyczące tego opracowania. Profesjonalny skład tekstu artykułu zawdzięczam panu Pawłowi Mleczce.

Bonn, we wrześniu 2010 *Wojciech Gajda*

1.1 Wprowadzenie do teorii funkcji abelowych

Teoria funkcji abelowych powstała na początku XIX wieku w wyniku badania całek postaci

$$\int W(x, \sqrt{R(x)})dx,$$

gdzie $W(x)$ jest funkcją wymierną, a $R(x)$ wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Badano wtedy także ogólniejsze całki

$$\int W(x, y)dx,$$

gdzie x i y spełniają równanie algebraiczne typu $F(x, y) = 0$. Jako pierwszy przykład rozważmy znacznie wcześniej znaną całkę elementarną

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Funkcją odwrotną $x = f(u)$ do tej całki jest funkcja sinus, która ma okres 2π. Funkcja f spełnia równanie różniczkowe $f(u)^2 + [f'(u)]^2 = 1$. Ponadto, przekształcenie

$$u \quad \longrightarrow \quad (f(u), f'(u))$$

definiuje parametryzację okręgu jednostkowego $x^2 + y^2 = 1$. Dobrze znany wzór na sinus sumy kątów zapisujemy w tej notacji jako równość

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\Phi(x_1,x_2)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

gdzie $\Phi(x_1, x_2) = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$.

Niech teraz $R(t)$ będzie wielomianem stopnia 3 lub 4, który ma pojedyńcze pierwiastki zespolone. Rozważmy całkę (nie elementarną)

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Tak jak uprzednio definiujemy funkcję odwrotną $x = f(u)$. Funkcja f ma dwa okresy, które są liczbami zespolonymi, liniowo niezależnymi nad ciałem liczb rzeczywistych. Spełnione jest równanie różniczkowe $[f'(u)]^2 = R(f(u))$. Ponadto, przekształcenie

$$u \quad \longrightarrow \quad (f(u), f'(u))$$

definiuje parametryzację krzywej $y^2 = R(x)$, którą nazywamy *krzywą eliptyczną* Całki ostatniego typu pojawiają się, gdy obliczamy długość łuku elipsy. Funkcje odwrotne $x = f(u)$, gdy $deg(R(x)) = 3, 4$ noszą nazwę *funkcji eliptycznych* i stanowią naturalne odpowiedniki funkcji sinus. Całki przy pomocy, których definiujemy funkcje eliptyczne noszą nazwę całek eliptycznych. W przypadku, gdy R jest wielomianem stopnia większego od czterech, równanie $y^2 = R(x)$ zadaje *krzywą hipereliptyczną.*

Funkcje eliptyczne znajdują się w centrum zainteresownia wielu czołowych matematyków od około trzystu lat. Tomy I-20 i I-21 dzieła *Opera omnia* Leonarda Eulera prawie w całości były poświecone badaniu całek eliptycznych. W szczególności, Euler (uogólniając wcześniejsze wyniki Fagnano) dowiódł wzór na dodawanie całek $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ (jest to całka długości łuku lemniskaty), który ma postać:

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\Phi(x_1,x_2)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

gdzie $\Phi(x_1, x_2) = \frac{x_1\sqrt{1-x_2^4}+x_2\sqrt{1-x_1^4}}{1+x_1^2x_2^2}$. Legendre, Gauss, Eisenstein i Weierstrass podjęli badania całek i funkcji eliptycznych rozpoczęte przez Eulera. Na przykład, Legendre opublikował monumentalne dzieło na ten temat: *Traité des functiones elliptiques et des integrales euleriennes.* Gauss dowiódł, że funkcja odwrotna do całki długości łuku lemniskaty jest dwuokresowa oraz rozwinął teorię *sinusa i cosinusa lemniskaty.* Jacobi, Eisenstein, a następnie Weierstrass podali swoje własne wersje teorii funkcji eliptycznych oraz badali zastosowania funkcji eliptycznych do analizy i arytmetyki. W naszych czasach najbardziej znaną funkcją eliptyczną jest funkcja $\wp$, którą wprowadził Weierstarss podczas swoich wykładów w Berlinie w latach 60-stych XIX wieku:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,\,(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right],$$

gdzie ω_1, ω_2 jest ustaloną parą liczb zespolonych, takich że $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$. Jest to dwuokresowa funkcja meromorficzna (której okresami są liczby ω_1 i ω_2) o biegunach rzędu dwa w punktach kraty $\Lambda := \mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2$ (krata Λ nosi nazwę *kraty okresów funkcji* $\wp$) i jest analityczna w pozostałych $z \in \mathbf{C}$. Funkcja $\wp$-Weierstrassa spełnia równanie różniczkowe

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

gdzie

$$g_2 := 60 \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq0} \frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 := 140 \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq0} \frac{1}{\omega^6}.$$

Funkcja $\wp(z)$ jest funkcją odwrotną do całki eliptycznej $z = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$ oraz spełnia wzór na dodawanie:

$$\wp(z_1+z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\right]^2.$$

Ostatni wzór pozwala wprowadzić strukturę grupy abelowej na punktach wymiernych krzywej eliptycznej $y^2 = 4x^3-g_2x-g_3$. Każda funkcja eliptyczna, której kratą okresów jest Λ wyraża się jako pewna funkcja wymierna dwóch zmiennych od $\wp$ i jej pochodnej. Dowody własności funkcji $\wp$-Weierstrassa można znaleźć w książce Whittakera i Watsona: *Kurs analizy współczesnej II* i w książce Langa: *Elliptic functions*. Teorię funkcji i całek eliptyczych zilustrujemy dwoma przykładami obliczenia okresów, które pochodzą ze wspomnianego dzieła Legendre'a. Dla obliczenia okresów krzywej $y^2 = 4x^3 - 4x$ Legendre posłużył się funkcjami Gaussa długości łuku lemniskaty i pokazał, że:

$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-t}} = \frac{1}{2}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{2^{3/2}\pi^{1/2}}, \qquad w_2 = i\omega_1.$$

Ponieważ dla kraty $\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}i$ zachodzi związek $g_2 = 4\omega_1^4$, otrzymujemy stąd wartość szeregu

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,\,(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+ni)^4} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^8}{2^6\times 3\times 5\times \pi^2}.$$

Dla krzywej $y^2 = 4x^3 - 4$ okresy wyliczone przez Legendre'a wynoszą:

$$\omega_1 = \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{1}{3}B(\frac{1}{6},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^3}{2^{4/3}\pi}, \qquad w_2 = \rho\omega_1,$$

gdzie $\rho^2+\rho+1 = 0$. Dla kraty $\mathbf{Z}[\rho] = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\rho$ spełniony jest związek $g_3 = 4\omega_1^6$, co pozwala obliczyć wartość szeregu

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2,\,(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+ni)^6} = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^{18}}{2^8\times 5\times 7\times \pi^6}.$$

Występujące w powyższych wzorach funkcje beta i gamma zdefiniował Euler:

$$B(a,b) := \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^z\frac{dt}{t} = e^{-\gamma z}z^{-1}\prod_{n=1}^\infty (1+\frac{z}{n})^{-1}e^{\frac{z}{n}},$$

gdzie

$$\gamma := \lim_{k\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n)$$

jest *stałą Eulera*, równą w przybliżeniu $0,577215664$.

Za pomocą iloczynu niekończonego

$$\sigma(z) := \prod_{\omega\in\Lambda,\ \omega\neq 0}(1-\frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}},$$

dla kraty $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ definiujemy funkcję σ Weierstrassa, która jest funkcją całkowitą i ma pojedyńcze zera w każdym punkcie kraty. Funkcja σ pełni dla kraty Λ podobną rolę jak funkcja

$$z\prod_{n\geqslant 1}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} = -e^{\gamma z}\Gamma(-z)^{-1}$$

dla zbioru liczb naturalnych $\mathbf{N}$, oraz jak funkcja

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0} (1 - \frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}$$

dla zbioru lizb całkowitych $\mathbf{Z}$. Funkcje $\wp$ i σ Weierstrassa łączy związek

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}[\log \sigma(z)].$$

W latach 20-stych XIX wieku Abel podał nową metodę obliczania całek $\int \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$, dla wielomianu R stopnia $\geqslant 5$. Metoda Abela wymaga wprowadzenia g nowych zmiennych, gdzie g oznacza rodzaj krzywej $y^2 = R(z)$. Przy tym podejściu do zagadnienia całkowania zamiast badać jedną całkę analizuje się jednocześnie g całek. Gdy $deg\, R(x) = 5, 6$ rodzaj krzywej $y^2 = R(x)$ wynosi 2. Posługując się metodą Abela w tym przypadku, definiujemy dwie nowe zmienne za pomocą układu równań:

$$v_1 = \int_o^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

$$v_2 = \int_0^{x_1} \frac{tdt}{\sqrt{R(t)}} + \int_0^{x_2} \frac{tdt}{\sqrt{R(t)}}$$

oraz funkcje f_1 i f_2, które zadane są równaniami:

$$x_1 + x_2 = f_1(v_1, v_2)$$

$$x_1 x_2 = f_2(v_1, v_2).$$

Abel wykazał, że tak zdefiniowane funkcje f_1 i f_2 mają cztery okresy w $\mathbf{C}^2$, które jako wektory są liniowo niezależne nad ciałem liczb rzeczywistych. Funkcje Abela (od nazwiska autora nazywane *funkcjami abelowymi*) spełniają formuły dodawania dzięki, którym $f_i(v_1+u_1, v_2+u_2)$, dla $i = 1, 2$ można otrzymać jako wyrażenie wymierne od wartości f_1, f_2 i ich pierwszych pochodnych w punktach (v_1, v_2), (v_1, u_2), (u_1, v_2) oraz (u_1, u_2).

Przypomnijmy, że każda gładka krzywa algebraiczna C zdefiniowana nad ciałem $\mathbf{C}$ zadaje zwartą powierzchnię Riemanna $X := C(\mathbf{C})$ (to znaczy jednowymiarową, zwartą rozmaitość analityczną). Mówimy, że powierzchnia Riemanna X rodzaju g jest *hipereliptyczna* jeśli spełniony jest jeden z następujących równoważnych warunków:

- istnieje nakrycie rozgałęzione $F : X \longrightarrow \mathbf{P}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{C}}$ stopnia dwa sfery Riemanna $\mathbf{P}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$
- istnieje inwolucja $w : X \longrightarrow X$, która ma $2g + 2$ punktów stałych
- istnieje inwolucja $w : X \longrightarrow X$, taka, że powierzchnia ilorazowa X/w jest rodzaju zero (to znaczy, X/w jest biracjonalnie równoważna z $\mathbf{P}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{C}}$).

Oznaczmy przez $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2g+1} \in \mathbf{P}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{C}}$ obrazy punktów rozgałęzienia nakrycia F. Powierzchmia X jest zadana równaniem

$$y^2 = \prod_{i=0}^{2g+1} (x - \alpha_i)$$

jeśli $\alpha_i \neq \infty$, dla $i = 0, 1, \ldots, 2g{+}1$, i równaniem

$$y^2 = \prod_{i=0}^{2g} (x - \alpha_i),$$

jeśli $\alpha_{2g+1} = \infty$. Zachodzi także twierdzenie odwrotne: równanie

$$y^2 = R(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \beta_i),$$

gdzie $\beta_i \neq \beta_j$ dla $i \neq j$, zadaje krzywą hipereliptyczną rodzaju $g = [\frac{n-1}{2}]$. Jeśli C jest krzywą hipereliptyczną rodzaju $g > 1$, to C posiada $2g{+}2$ *punktów Weierstrassa*, które są jednocześnie punktami rozgałęzienia nakrycia F i punktami stałymi inwolucji w.

Najważniejsze prace w dorobku naukowym profesora Zdzisława Krygowskiego dotyczą teorii funkcji abelowych dla krzywych hiperliptycznych. Przed omówieniem wyników poszczególnych prac zdefiniujemy rozmaitość Jacobiego krzywej hipereliptycznej, co pozwoli nam w naturalny sposób wprowadzić macierze okresów i funkcje theta, o których pisał Krygowski. Niech C będzie krzywą algebraiczą, gładką, która określa nad $\mathbf{C}$ powierzchnię Riemanna rodzaju $g \geqslant 1$ (geometrycznie rzecz ujmując, nasza powierzchnia ma g "dziur"). Niech $\Omega^1(C)$ oznacza przestrzeń $1-$form różniczkowych, holomorficznych na C. Riemann dowiódł, że wymiar tej przestrzeni nad $\mathbf{C}$ wynosi g. Ustalmy bazę $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g)$ tej przestrzeni. Na przykład, jeśli C zadana jest równaniem $y^2 = R(x)$, gdzie R jest wielomianem stopnia $2g+1$ o różnych pierwiastkach, to układ form różniczkowych $(\frac{dx}{y}, \frac{xdx}{y}, \ldots, \frac{x^{g-1}dx}{y})$ stanowi bazę w $\Omega^1(C)$. Jak już wspomnieliśmy Abel zamiast obliczać całkę z jednej formy $\omega \in \Omega^1(C)$ rozważał jednocześnie całki z g form. Ustalmy punkt $P_0 \in \Omega^1(C)$. Przyporządkowanie punktowi $P \in C(\mathbf{C})$ układu całek z form bazy:

$$P \longrightarrow (\int_{P_0}^{P} \omega_1, \int_{P_0}^{P} \omega_2, \ldots, \int_{P_0}^{P} \omega_g)$$

zależy istotnie od wyboru dróg całkowania, a także od wyboru punktu P_0. Aby uniezależnić się od tych wyborów, ustalimy zamknięte drogi całkowania $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2g}$, które zadają bazę pierwszej grupy homologii $H_1(C(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{2\mathrm{g}}$ powierzchni Riemanna $C(\mathbf{C})$. Obliczamy wartości $2g^2$ całek $\int_{\gamma_i} \omega_j$, dla $1 \leqslant i \leqslant 2g$, $1 \leqslant j \leqslant g$, które nazywamy *całkami kanonicznymi pierwszego rodzaju*. Macierz utworzona z tych całek $\Omega := \left[\int_{\gamma_i} \omega_j\right] \in M_{g,2g}(\mathbf{C})$ nosi nazwę *macierzy okresów* krzywej C. Macierz okresów zapisujemy w postaci $\Omega = [\Omega_1 | \Omega_2]$ przy tym $g \times g-$macierze Ω_1 i Ω_2 mają współczynniki w $\mathbf{C}$. Z twierdzenia Riemanna wynika, że w przestrzeni $\Omega^1(C)$ i w grupie $H_1(C(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ można wybrać bazy w taki sposób, że macierze Ω_1 i Ω_2 spełniają następujące warunki (tak zwane *relacje Riemanna*):

- $\Omega_1 \, {}^t\Omega_2 = \Omega_2 \, {}^t\Omega_1$
- macierz $\quad -i(\bar{\Omega}_1 \, {}^t\Omega_2 - \bar{\Omega}_2 \, {}^t\Omega_1)$ jest dodatnio określona.

Wynika z tego, że macierz Ω_1 jest odwracalna oraz, że po zamianie baz macierz Ω przyjmuje postać $\Omega = [I_g | \tau]$. Przy tym I_g jest macierzą jednostkową, natomiast $\tau = \Omega_1^{-1}\Omega_2$ i τ jest macierzą symetryczną, której część urojona jest macierzą dodatnio określoną. Oznaczmy przez Λ_Ω podrupę w grupie addytywnej $\mathbf{C}^g$ generowaną przez kolumny macierzy okresów Ω. Wtedy po normalizacji, opisanej powyżej otrzymujemy kratę $\Lambda_\Omega = \mathbf{Z}^g + \mathbf{Z}^g\tau$, którą nazywamy *kratą okresów* krzywej C. Krata okresów stanowi zbiór wartości układów $g-$całek z form różniczkowych z $\Omega^1(C)$ obliczanych po wszystkich drogach zamkniętych na C. Dla ustalonego $P_0 \in C(\mathbf{C})$ przyporządkowanie

$$P \longrightarrow (\int_{P_0}^{P} \omega_1, \int_{P_0}^{P} \omega_2, \ldots, \int_{P_0}^{P} \omega_g) \quad \text{modulo} \quad \Lambda_\Omega$$

definiuje funkcję $\phi_{P_0} : C(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}^g/\Lambda_\Omega$, którą nazywamy *przekształceniem Abela-Jacobiego*. Torus zespolony $Jac(C) := \mathbf{C}^g/\Lambda_\Omega$ nosi nazwę *rozmaitości Jacobiego* krzywej C. Definicja rozmaitości Jacobiego, która nie zależy od wyborów baz ma postać

$$Jac(C) := [\Omega^1(C)^*]/H_1(C(\mathbf{C}), \mathbf{Z}),$$

gdzie przestrzeń dualną $\Omega^1(C)^* = Hom(\Omega^1(C), \mathbf{C})$ utożsamiamy z $\mathbf{C}^g$, natomiast $H_1(C(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ z $\Lambda_\Omega \subset \mathbf{C}^g$ za pomocą zanurzenia

$$\gamma \quad \longrightarrow \quad (\omega \longrightarrow \int_\gamma \omega).$$

Niech $Div(C)$ oznacza abelową grupę wolną generowaną przez punkty na krzywej C, a przez $Div^0(C)$ podgrupę *dywizorów stopnia zero*, złożoną z kombinacji liniowych $\sum n_P P$, gdzie $n_P \in \mathbf{Z}$, $n_P = 0$, dla prawie wszystkich P, oraz $\sum n_P = 0$. Przekształcenie Abela-Jacobiego ϕ_{P_0} przedłuża się do homomorfizmu grup

$$\phi_{P_0} : Div^0(C) \longrightarrow Jac(C),$$

który jest surjekcją, a jego jądro składa się z dywizorów wszystkich funkcji meromorficznych na C. Ten ostatni fakt zostal dowiedziony niezależnie przez Abela i przez Jacobiego (rzecz jasna w terminach całek abelowych, a nie rozmaitości $Jac(C)$). Terminologia, którą wykorzystaliśmy przy zdefiniowaniu homomorfizmu Abela-Jacobiego została wprowadzona w pierwszej połowie XX wieku, w pracach Lefschetza i Weila, chociaż jej źródeł należy szukać w pracach Riemanna, Pryma, Apella i Poincare'ego o funkcjach abelowych, które studiował Krygowski w końcu XIX wieku. W przypadku krzywej eliptycznej (wtedy $g = 1$) funkcja ϕ_{P_0} zadaje izomorfizm grupy punktów wymiernych $C(\mathbf{C}) \cup \{\infty\}$ z grupą $Jac(C)$.

Z relacji Riemanna wynika, że macierz okresów Ω definiuje na przestrzeni $V = [\Omega^1(C)]^*$ formę hermitowską

$$H : V \times V \longrightarrow \mathbf{C}$$

$H(z, w) = z^t(\Im\tau)\bar{w}$, która jest dualna do formy

$$\Omega^1(C) \times \Omega^1(C) \longrightarrow \mathbf{C}$$

zadanej przyporządkowaniem $(\omega, \omega') \longrightarrow i \int_C \omega \wedge \bar{\omega}'$. Forma H przyjmuje wartości całkowite na wektorach z kraty Λ_Ω. Nazywamy ją *formą Riemanna*. Para $(\Lambda_\Omega,\ H)$ określa na torusie zespolonym $Jac(C)$ strukturę rozmaitości algebraicznej rzutowej. Wynika to z twierdzenia dowiedzionego przez Lefschetza, które mówi, że istnieje zanurzenie torusa $Jac(C)$ na podzbiór domknięty w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{C}}$ określone przez *funkcje theta* stowarzyszone z formą hermitowską H. Współcześnie mówimy, że torus $Jac(C)$ jest *spolaryzowaną rozmaitością abelową*. Torelli dowiódł, ż każda krzywa rzutowa gładka C nad $\mathbf{C}$ jest wyznaczona jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu rozmaitości zespolonych) przez parę $(Jac(C), H)$.

Riemann wprowadził funkcję theta zdefiniowaną za pomocą rozwinięcia w szereg Fouriera

$$\Theta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} e^{\pi i (m^t \tau m)} e^{2\pi i (m^t z)},$$

dla $z \in \mathbf{C}^g$ i $\tau \in M_{g,g}(\mathbf{C})$, która jest macierzą symetryczną taką, że część urojona $\Im \tau$ jest dodatnio określona. Dla każdego wektora $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ z przestrzeni $\mathbf{R}^g \times \mathbf{R}^g$ definiujemy *funkcję theta z charakterystyką*:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \tau) := e^{\pi i a^t \tau b + 2\pi i a^t (z+b)} \Theta(z + \tau a + b, \tau).$$

Jeżeli $a, b \in \frac{1}{1}\mathbf{Z}^g \subset \mathbf{R}^g$, to wektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ nazywamy *theta charakterystyką*. Jeżeli $\Omega = [\Omega_1|\Omega_2]$ jest macierzą okresów krzywej C, to układ 4^g funkcji theta z charakterystykami, ze współrzędnymi 0 lub $\frac{1}{2}$, określa zanurzenie holomorficzne na podzbiór domknięty w przestrzeni rzutowej

$$\phi : Jac(C) \longrightarrow \mathbf{P}^{\mathbf{4^g-1}}_{\mathbf{C}}$$

gdzie $\phi(z) := \left[\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (\Omega_1^{-1} 2z, \Omega_1^{-1}\Omega_2)\right]$. Współrzędne rzutowe indeksowane są tutaj 4^g wektorami $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ z $\frac{1}{2}\mathbf{Z}^{\mathbf{g}}$ ze współrzędnymi 0 lub $\frac{1}{2}$, począwszy od wektora $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ i skończywszy na $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Z twierdzenia Lefschetza wynika, że funkcja ϕ ustala izomorfizm holomorficzny torusa zespolonego $Jac(C)$ z podrozmaitością algebraiczną w $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{4^g-1}}$. Równania algebraiczne, które określają rozmaitość algebraiczną $Jac(C)$ w przestrzeni rzutowej zadają tożsamości algebraiczne spełniane przez przestępne funkcje $\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau)$.

W przypadku, gdy $g=1$ mamy cztery funkcje theta z charakterystykami: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Są to funkcje zmiennych $z,\tau \in \mathbf{C}$, gdzie $\Im\tau > 0$, które (dla ustalonego τ) określają zanurzenie krzywej eliptycznej $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$ w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{3}}$ (jako przekrój dwóch powierzchni stopnia dwa). Dla ustalonego $\tau \in \mathbf{C}$, takiego, że $\Im\tau > 0$ przyjmujemy oznaczenie $q := e^{\pi i\tau}$. Wtedy za pomocą funkcji theta z charakterystykami można wyrazić klasyczne funkcje theta Jacobiego zdefiniowane dla kraty $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$:

$$\vartheta_1(z) = -i\theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(z,\tau) = -i\sum_{m\in\mathbf{Z}}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\pi i(2m+1)z}$$

$$\vartheta_2(z) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\pi i(2m+1)z}$$

$$\vartheta_3(z) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} q^{m^2} e^{2\pi imz}$$

$$\vartheta_4(z) = \theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}(-1)^m q^{m^2} e^{2\pi imz}.$$

Krygowski w swoich pracach [**5**], [**17**] i [**18**] badał tożsamości algebraiczne dla funkcji theta krzywych hipereliptycznych rodzaju $g \geqslant 3$. Równania algebraiczne Jacobianów krzywych hipereliptycznych (i ogólniej arytmetyka i geometria tych rozmaitości abelowych) są intesywnie badane w naszych czasach ponieważ znajdują różnorodne zastosowania w teorii liczb, analizie zespolonej i w fizyce. Ze względu na dużą złożoność obliczeniową operacji dodawania na rozmaitościach abelowych, równania Jacobianów krzywych hipereliptycznych (szczególnie krzywych rodzaju 2 i 3) znalazły zastosowanie w kryptografii, przy konstrukcji bezpiecznych systemów kodowania z kluczem publicznym. Widać z tego wyraźnie, że problematyka, którą prawie sto lat temu uprawiał profesor Krygowski, nic nie straciła ze swojej atrakcyjności i nadal stanowi obiekt badań wielu matematyków.

Literatura

N.H. Abel, *Ouvres completès* Tomme I, II, Zredagowane i opatrzone wstępem przez L. Sylowa i S. Lie, Reprint drugiego wydania (1881), Edit. Jacques Gabay, Sceaux, 1992.

C.G. Jacobi, *Gesammelte Werke* Bände I-VIII, Reprint pierwszego wydania (z wieloma zmianami redakcyjnymi) (1864-1890), Chelsea Publising, 1969.

G. Göppel, *Theorie transcedentum Abelianarum primi ordinis adumbrato levis,* J.Reine Angew. Math. **35** (1847), 277.

K. Weierstrass, *Beitag zur Theorie der Abel'schen Integrale,* Jahreber. Königl. katolishen Gymnasium zu Braunsberg in dem Shuljahre 1848/1849 (1849), 3-23.

G. Rosenhain, *Abhandlung über Funktionen zweier Variabler mit vier Perioden,* Mem. Pres. l'Acad. de Sci. de France des Savants **9** (1851), 361-455.

K. Weierstrass, *Zur Therie Abelchen Functionen,* J. Reine. Angew. Math. **47** (1854), 289-306.

K. Burkhardt, *Beitrage zur Theorie der hyperelliptische Sigmafunctionen,* Math. Ann. **32** (1888), 381-402.

F. Klein, *Über hyperelliptische Sigmafunctionen,* Math. Ann. **32** (1888), 351-380.

E. Wiltheis, *Über die Potenzreihnen der hyperelliptischen Thetafunktionen,* Math. Ann. **32** (1888), 410-423.

O. Bolza, *On the first and second derivatives of hyperelliptic σ-functions*, Amer. J. Math. **17** (1895) no. 11.

H. F. Baker, *Abel's thoerem and the allied theory including the theory of Theta functions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

H. F. Baker, *On the hyperelliptic sigma fuctions,* Amer. J. Math. **20** (1898), 301-384.

H. F. Baker, *Multiple periodic functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1907.

A. Kräzer and **W. Wirtinger**, *Abelsche Functionen und allgemeine Thetafunctionen,* Encyklädie der Matematischen Wissenshaften, II (2), Heft 7, Teübner, 1915, pp. 603-882.

H. Bateman and **A. Erdeleyi**, *Higher transcedental functions,* vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1955.

J. D. Fay, *Theta fuctions on Riemann surfaces,* Lecture Notes in Math., **52**, Springer Verlag, Berlin, 1973.

E. T. Whittaker and **G. N. Watson**, *A course of modern analysis,* Cambidge University Press, Cambridge, 1973.

S. Lang, *Elliptic functions,* Springer Verlag, New York, 1973.

D. Mumford, *Curves and their Jacobian,* University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

P. Griffiths and **J. Harris**, *Principles of algebraic geometry,* Wiley, New York, 1978.

H. M. Farkas and **J. Kra**, *Riemann surfaces,* Graduate Texts in Math., **71**, Springer Verlag, New York, 1980.

D. Mumford, *Tata lectures on Theta I*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 1982.

J.-I. Igusa, *Problems on abelian functios at the time of Poincaré and some at present*, Bull. of the AMS, **6**, no. 2 (1982), pp. 161-174.

A.Wiles, *Modular eliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. ofMath. **141**, no.2 (1995), pp. 443-551.

H.-J. Weber, *Hyperelliptic simple fators of $J_0(N)$ with dimension at least* 3, Experim. Math., **6**, no. 4 (1997), pp. 273-287.

J.-P. Serre, *Ouvres, Collected papers* vol. I-IV, Springer Verlag, 2000.

G. Shimura, *Collected papers* vol. I-IV, Springer Verlag, 2001.

J. Guárdia, *Jacobian nullwerte, periods and symmetric equations for hyperelliptic curves,* Ann. Ins. Fourier, Grenoble, **57**, no. 4 (2007), 153-1283.

R. de Jong, *Canonical height and logarithmic equidistribution on superelliptic curves,*preprint, arXives: 0911.1271.

1.2 Omówienie prac

Pierwszą pracę Zdzisław Krygowski opublikował w czasopiśmie Prace Matematyczno-Fizyczne w 1894 roku w wieku 21 lat. Problematyka, której poświęcona została praca [**1**] wytyczyła główny nurt badań Krygowskiego w pierwszym okresie twórczości naukowej, aż do przedstawienia rozprawy habilitacyjnej w 1908 roku. Rozwijana przez cały dziewiętnasty wiek (poczynając od wyników Abela i Jacobiego, przez prace Riemanna i Pryma, po badania Weierstrassa i Poincare'ego) teoria funkcji abelowych, a w szczególności funkcji eliptycznych i hipereliptycznych, stanowiła na przełomie wieków XIX i XX, jedną z najważniejszych dziedzin matematyki. Badania naukowe Krygowskiego, których wyniki zawierają prace [**1**] - [**12**] z listy publikacji, mieszczą się w głównym nurcie tematycznym tej dziedziny.

W pracy [**1**] Krygowski podejmuje problem rozwijania funkcji abelowych w szeregi trygonometryczne. Niech $u(z)$ będzie funkcją eliptyczną (zmiennej zespolonej z) zadaną przez całkę

$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = z,$$

o okresach $4K$ i $2K'i$. Współczynniki szeregu Fouriera funkcji $u(z)$ mają postać ogólną

$$A_m = \frac{1}{4K}\int_{z_0}^{z_0+4K} u(z)e^{\frac{m\pi iz}{2K}}dz = \frac{1}{4K}\int_{z_0}^{z_0+4K} u(z)e^{\frac{m\pi i}{2K}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}}dz.$$

Riemann, a następnie Poincare i Appell zastosowali rozwinięcia klasycznych funkcji theta do obliczania współczynników A_m w rozwinięciach trygonometrycznych pewnych funkcji przestępnych. W pracy [**1**] Krygowski stosuje metodę Appella-Poincare do badania szeregu Fouriera funkcji

$$H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-ma)^2+p]^z}$$

i funkcji ogólniejszych

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_k)\in \mathbf{Z}^k} \frac{1}{[F(m_1, m_2, \ldots, m_k)]^z},$$

gdzie $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ jest formą kwadratową zmiennych x_1, x_2, $\ldots$, x_k oraz $|z| > \frac{k}{2}$. Krygowski wykorzystuje rozwinięcia funkcji Γ i funkcji ϑ_3 Jacobiego przy wyprowadzeniu rozwinięcia

$$H(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos\frac{2\pi mx}{a},$$

gdzie

$$A_m = \frac{2^\sigma}{au(e^{2\pi iz}-1)\Gamma(z)}\int_L e^{-pu-\frac{m^2\pi^2}{a^2u}}u^{z-\frac{3}{2}}du,$$

oraz $\sigma = 0$, gdy $m = 0$ oraz $\sigma = 1$, gdy $m \neq 0$. Występująca we wzorze na A_m całka krzywoliniowa wyraża się w pewnych przypadkach, za pomocą funkcji wykładniczych, a w innych za pomocą funkcji specjalnej Bessela. Podobne rozwinięcia Krygowski wyprowadza także dla funkcji $H(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. W następnej części pracy [**1**] Krygowski zastosował tak zwaną tożsamość dwukwadratową Jacobiego łączącą wartości specjalne funkcji ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 i ϑ_4 do wyprowadzenia (analogicznej w formie) zależności agebraicznej dwóch szeregów postaci

$$\sum_{(m_1,m_2,m_3,m_4)\in\mathbf{Z}^4} \frac{1}{(P_1P_2P_3P_4)^z}$$

i dwóch szeregów postaci

$$\sum_{(m_1,m_2,m_3,m_4)\in\mathbf{Z}^4} \frac{1}{(Q_1Q_2Q_3Q_4)^z}$$

gdzie

$$P_j = a_j^2 m_j^2 + 2m_j v_j i$$

$$Q_j = a_j(m_j + \frac{1}{2})^2 + 2(m_j + \frac{1}{2})v_j i$$

dla $j = 1, 2, 3, 4$ i ustalonych wektorów (a_1, a_2, a_3, a_4), (v_1, v_2, v_3, v_4) z $\mathbf{C}^4$. Podobne tożsamości łączące wartości funkcji zwiazanych z funkcjami theta były dowodzone w późniejszych pracach Krygowskiego na przykład w [**5**], [**10**] i [**12**]. W pracy [**1**] autor dowodzi także rozwinięcia funkcji $H(x)$ za pomocą funkcji theta wprowadzonych przez Briota i Bouqueta. W zakończeniu pracy [**1**] Krygowski nakreśla program dalszych badań funkcji specjalnych, który realizuje konsekwentnie w swoich następnych pracach. Program ten sprowadza się do następujących zagadnień badawczych:

- badania rozwinięcia funkcji specjalnych (np. funkcji hipereliptycznych) w szeregi trygonometryczne metodą Apella-Poincare'ego
- znajdowanie zależności algebraicznych pomiędzy szczególnymi wartościami funkcji specjalnych, które wynikają z klasycznych tożsamości spełnianych przez funkcje theta Jacobiego, Riemanna, Pryma i Krätzera

- obliczanie wartości całek hipereliptycznych za pomocą rozwinięć w szeregi trygonometryczne metodą Apella-Poincare'ego.

Prace [**2**], [**3**] i [**4**] z listy publikacji Krygowskiego poświęcone zostały pewnemu zagadnieniu z klasycznej analizy zespolonej. W tych pracach Krygowski rozwija pochodzącą od Poincare'ego metodę konstruowania funkcji zmiennej zespolonej, które mają z góry zadany zbiór osobliwości. Pierwsze przykłady takich funkcji poznajemy zazwyczaj na wykładach z analizy zespolonej, jak na przykład $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ (ze zbiorem osobliwości wypełniającym okrąg jednostkowy) lub funkcja Tannery'ego

$$\psi(z) = -\frac{1+z}{1-z} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}$$

(zbiór osobliwości ψ jest okręgiem jednostkowym, funkcja przyjmuje wartość -1 wewnątrz koła jednostkowego oraz wartość 1 na zewnętrz koła jednostkowego). Niech $\{A_r\}_{r\in\mathbf{N}}$ będzie zbiorem gęstym w kole jednostkowym zawartym w płaszczyźnie zespolonej. W pracy [**4**] Krygowski wykorzystuje funkcję Tannery'ego do konstrukcji funkcji postaci

$$\phi(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Phi(r,\theta,A_r)}{(z-A_r)^{m_r}}$$

(dla ustalonej liczby naturalnej p) o następujących własnościach:

(a) punkty osobliwe funkcji $\phi(z)$ leżą gęsto w kole

$$K(0,p) := \{z \in \mathbf{C} : \quad |z| \leqslant p\},$$

(b) na zewnątrz koła $K(0,p)$ szereg określający funkcję $\phi(z)$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie,

(c) poza kołem $K(0,p)$ funkcja $\phi(z)$ jest jednokrotną funkcją analityczną.

Praca [**4**] zawiera konstrukcję funkcji $\Phi(r,\theta,A_r)$, dowody własności (a), (b) i (c) oraz dyskusję możliwych uogólnień.

Prace [**2**] i [**3**] zawierają konstrukcję i analizę własności kolejnych przykładów funkcji zmiennej zespolonej o zadanym zbiorze osobliwości.

Niech q_1, q_2, q_3, q_4 będą liczbami zespolonymi o module mniejszym od jeden. W pracy [**3**] Krygowski definiuje i bada funkcję

$$\phi(z) = \sum_{(m_1,m_2,m_3,m_4)} \frac{q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_3^{m_3} q_4^{m_4}}{z - \frac{1}{m_1+m_2}[(m_1-m_2) + i2\sqrt{m_1 m_2 \frac{m_3-m_4}{m_3+m_4}}]},$$

gdzie sumowanie wzięte jest po czwórkach liczb całkowitych nieujemnych z wyłączeniem przypadków: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$ oraz $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = m_4 = 0$. Funkcja ϕ jest jednowartościową funkcją ciągłą poza kołem jednostkowym, które stanowi jej obszar osobliwy. Niech $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ będą ustalonymi zbiorami liczb zespolonych takich, że szereg $\sum A_j$ jest zbieżny bezwzględnie. W dalszej częśći pracy [**3**] i w pracy [**2**] Krygowski modyfikuje metodę Poincare'ego konstrukcji funkcji z osobliwościami w zbiorze $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ zastępując wyrażenia $\frac{1}{z-a_j}$ z metody Poincare'ego wyrażeniami postaci

$$\frac{(-1)^m e^{-\frac{\pi i a_j}{a}}}{z - a_j - ma},$$

gdzie $a \in \mathbf{C}^{\times}$ jest ustaloną liczbą, a m przebiega liczby całkowite. Autor wprowadza funkcję

$$\phi(z) = \sum_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m A_j e^{-\frac{\pi i a_j}{a}}}{z - a_j - ma},$$

i po przekształceniu

$$\phi(z) = \frac{\pi}{a} \sum_j \frac{(-1)^m A_j e^{-\frac{\pi i a_j}{a}}}{\sin \frac{\pi}{a}(z - a_j)},$$

oraz dowodzi, że ϕ jest funkcją jednokrotną, ciągłą poza punktami zbioru $\{a_j + ma\}_{j=1, m\in\mathbf{Z}}^{\infty}$. Następnie Krygowski wykorzystuje funkcję ϕ do zdefiniowania pewnych funkcji dwuokresowych zmiennej zespolonej. ktore mają osobliwości w punktach zbiorów

$$\{a_j + m\omega + m'\omega' : \quad j \in \mathbf{N},\ m, m' \in \mathbf{Z}\}$$

$$\{b_j + m\omega + m'\omega' : \quad j \in \mathbf{N},\ m, m' \in \mathbf{Z}\},$$

gdzie ω, ω' jest ustaloną parą okresów kraty w $\mathbf{C}$, natomiast $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ są ustalonymi zbiorami liczb zespolonych.

Praca [**2**] opublikowana w prestiżowym czasopiśmie *Bulletin de la Societe Math. France* zawiera zwięzłe omówienie modyfikacji metody Poincare'ego i jej zastosowania do teorii funkcji eliptycznych i ogólniejszych funkcji dwuokresowych zmiennej zespolonej.

Przystąpimy teraz do omówienia wyników Krygowskiego z prac [**5**], [**7**], [**10**] i [**12**], które stanowią najważniejszą część dorobku naukowego tego autora. Rozważmy krzywą hiperliptyczną rodzaju 2 zadaną równaniem

$$y^2 = R(x) = x^5 + p_1^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5,$$

w którym wielomian $R(x) = \prod_{i=0}^{4}(x - \alpha_i)$ ma pierwiastki rzeczywiste i $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$. Z taką krzywą w naturalny sposób związane są całki abelowe pierwszego rodzaju

$$\int \frac{x^{k-1}dx}{\sqrt{R(x)}}$$

i całki abelowe drugiego rodzaju

$$\int \frac{x^{k+1}dx}{\sqrt{R(x)}},$$

dla $k = 0, 1$. Powierzchnię Riemanna krzywej rozcinamy wzdłuż pętli a_1, a_2, b_1, b_2, które odpowiadają wybranym generatorom pierwszej grupy homologii. Liczby zespolone uzyskane po wykonaniu całkowania po drogach a_1, a_2, b_1, b_2 dla całek pierwszego rodzaju oznaczymy przez

$$2\omega_{k1}, \qquad 2\omega_{k2}, \qquad 2\omega'_{k1}, \qquad 2\omega'_{k2},$$

natomiast dla całek drugiego rodzaju przez

$$2\eta_{k1}, \qquad 2\eta_{k2}, \qquad 2\eta'_{k1}, \qquad 2\eta'_{k2}.$$

Niech

$$I_k = \int \frac{a_{0k} + a_{1k}x + a_{2k}x^2 + a_{3k}x^3}{2\sqrt{R(x)}}dx$$

(gdzie $k = 1, 2$) będzie całką abelową ogólnej postaci dla krzywej $y^2 = R(x)$. Jeżeli wykonamy normalizację całek I_k po drogach całkowania a_1, a_2, b_1, b_2 w ten sposób, że dla $k = 1$ przyjmą one wartości:

$$0, \qquad 0, \qquad -2\pi i, \qquad 0,$$

natomiast dla $k = 2$ przyjmą wartości:

$$0, \qquad 0, \qquad 0, \qquad -2\pi i,$$

wówczas współczynniki a_{ij} formy różniczkowej z całki I_k zostaną wyrażone za pomocą następujących formuł (Krygowski przypisuje je Weberowi):

$$a_{0k} = 3\eta_{2k} + 2p_1\eta_{1k} + p_2\omega_{2k}$$

$$a_{1k} = \eta_{1k} - p_2\omega_{1k}$$

$$a_{2k} = -\omega_{2k} - 2p_1\omega_{1k}$$

$$a_{3k} = -3\omega_{1k}.$$

W pracy [**10**] Krygowski w elegancki sposób wyprowadza odpowiedniki wzorów Webera na współczynniki a_{ij} form różniczkowych całek abelowych I_k dla krzywych hipereliptycznych $y^2 = R(x)$ rodzaju g zadanych wielomianami

$$R(x) = x^{2g+1} + p_1 x^{2g} + \ldots + p_{2g+1} = \prod_{i=0}^{2g}(x - \alpha_i),$$

których pierwiastki są liczbami rzeczywistymi $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_{2g}$. Krygowski opisuje algorytm, który pozwala efektywnie (po obliczeniu pewnej liczby wyznaczników macierzy) wyrazić całki abelowe hipereliptyczne ogólnej postaci za pomocą znormalizowanych całek abelowych pierwszego i drugiego rodzaju. W przypadku, gdy $g = 3, 4$, Krygowski stosuje swój algorytm do zupełnego wyznaczenia całek I_k, których liczniki funkcji wymiernych zawierają dowolne wielomiany stopni odpowiednio 5 i 7.

Prace [**5**], [**7**], [**10**] i [**12**] (oraz ich omówienia [**6**], [**8**] i [**11**]) są poświęcone teorii funkcji theta, które określają zanurzenia rozmaitości Jacobiego krzywych hipereliptycznych w przestrzeniach rzutowych. Warto podkreślić, że badania Krygowskiego koncentrowały się na zagadnieniach teorii funkcji theta, które były przedmiotem zainteresowania najlepszych matematyków tamtych czasów na przykład: Riemanna, Pryma, Webera, Frobeniusa, Poincare'ego i Appella. Badano przede wszystkim analityczne własności funkcji theta. Współcześnie te same funkcje, o których sto lat temu pisał Krygowski, są nadal badane za pomocą nowoczesnej analizy i algebry. Metody geometrii algebraicznej XX wieku (rozwiniętej przez Grothendieka, Serre'a i ich współpracowników) pozwalają uzyskiwać czysto teorio liczbowe informacje z własności takich funkcji, jak funkcje theta krzywych hipereliptycznych, że wspomnę w tym miejscu teorię form automorficznych (i program Langlandsa), która pozwala (w szczególnych przypadkach) znajdować rozwiązania równań algebraicznych w liczbach całkowitych.

Wspomniany powyżej algorytm wyrażania całek abelowych za pomocą całek kanonicznych został zastosowny przez Krygowskiego w pracy [**12**] do uzyskania rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji theta stowarzyszonych z krzywymi hipereliptycznymi $y^2 = R(x)$, gdzie R jest wielomianem o współczynnikach zespolonych. Dla krzywych drugiego rodzaju Weierstrass (patrz Mathematische Werke III, str. 289) wprowadził piętnaście funkcji hiperliptycznych, w tym pięć funkcji pierwszej kategorii:

$$\frac{\vartheta_\mu^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} = c_\mu^2(x_1 - \alpha_\mu)(x_2 - \alpha_\mu); \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3, 4),$$

oraz dziesięć funkcji drugiej kategorii:

$$\frac{\vartheta_{\mu\nu}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)}; \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4,\ \mu < \nu)$$

gdzie $R(x) = \Pi_{i=0}^4(x - \alpha_i)$ oraz c_μ są stałymi łatwymi do obliczenia za pomocą α_μ. W pracy, opublikowanej przez Appella w tomie XIII czasopisma *Acta Mathematica*, podana została ogólna metoda rozwijania funkcji hiperliptycznych pierwszej kategorii w szereg Furiera. Metody Appella nie można zastosować do rozwijania funkcji

$$\frac{\vartheta_{\mu\nu}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)}$$

drugiej kategorii. W wyrażeniach definiujących te funkcje w mianowniku występuje czynnik $(x_1 - x_2)^2$, który uniemożliwia zamianę całki podwójnej we wzorze na współczynnik Fouriera na iloczyn dwóch całek pojedyńczych, jak to ma miejsce w metodzie Appella zastosowanej do funkcji

$$\frac{\vartheta_\mu^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)}.$$

Rozwiązanie tej trudności stanowi główny wynik prac [**10**] i [**12**], które złożyły się na rozprawę habilitacyjną Krygowskiego przedstawioną w 1908 roku. Z tego powodu temu zagadnieniu poświęcimy tutaj nieco więcej miejsca.

Rozważmy układ równań Abela-Jacobiego

$$\int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{A_{i1} + A_{i2}x}{\sqrt{R(x)}} dx + \int_{\alpha_3}^{x_2} \frac{A_{i1} + A_{i2}x}{\sqrt{R(x)}} dx = v_i,$$

dla $i = 1, 2$, gdzie $R(x) = \prod_{i=0}^4 (x - \alpha_i)$, natomiast pierwiastki spełniają warunki: $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$. Zakładamy, że całki pierwszego rodzaju są znormalizowane w ten sposób, że macierz okresów ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tau_{11} & \tau_{21} \\ 0 & 1 & \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix}.$$

Z układu równań Abela-Jacobiego obliczamy wartość wyznacznika macierzy zamiany zmiennych:

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(x_1, x_2)} = -(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}.$$

Przy takich oznaczeniach funkcje hipereliptyczne drugiej kategorii wprowadzone przez Weierstrasa przyjmują postać

$$\frac{\vartheta_{\mu\nu}(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} = c_{\mu\nu} \frac{\sqrt{(x_1 - \alpha_\mu)(x_1 - \alpha_\nu)}\sqrt{(x_2 - \alpha_\mu)(x_2 - \alpha_\nu)}}{(x_1 - x_2)} P(x_1, x_2)$$

gdzie $P(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1 - \alpha_\mu)(x_1 - \alpha_\nu)} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2 - \alpha_\mu)(x_2 - \alpha_\nu)}$, a stałe $c_{\mu\nu}$ wyrażają się przez wartości pochodnej wielomianu R w miejscach α_μ. Rozważmy rozwinięcie Fouriera

$$\frac{\vartheta_{\mu\nu}^2(v_1, v_2)}{\vartheta_5^2(v_1, v_2)} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} P_{n_1 n_2} e^{2\pi i n_1 v_1 + 2\pi i n_2 v_2}$$

gdzie współczynniki $P_{n_1n_2}$ szeregu Fouriera funkcji $\frac{\vartheta^2_{\mu\nu}(v_1,v_2)}{\vartheta^2_5(v_1,v_2)}$ obliczamy za pomocą całki podwójnej

$$P_{n_1n_2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\vartheta^2_{\mu\nu}(v_1, v_2)}{\vartheta^2_5(v_1, v_2)} e^{-2\pi i n_1 v_1 - 2\pi i n_2 v_2} dv.$$

Po wykonaniu podstawień otrzymujemy

$$P_{n_1n_2} = -c^2_{\mu\nu}(A_1A_{22} - A_{12}A_{21}) \times$$

$$\times \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{(x_1 - \alpha_{mu})(x_2 - \alpha_{mu})(x_1 - \alpha_{nu})(x_1 - \alpha_{nu})}{(x_1 - x_2)\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}} P^2(x_1, x_2) e^{-A} dx_1 dx_2,$$

gdzie całkowanie odbywa się po odpowiednio dobranych drogach L_1 i L_2 na powierzchni Riemanna oraz

$$A = 2\pi i n_1 \left[\int_{\alpha_1}^{x_1} d\omega_1 + \int_{\alpha_3}^{x_2} d\omega_1 \right] + 2\pi i n_1 \left[\int_{\alpha_1}^{x_1} d\omega_2 + \int_{\alpha_3}^{x_2} d\omega_2 \right],$$

W ostatnim wzorze w nawiasach kwadratowych występują całki kanoniczne rozważanej krzywej. We wzorze na współczynnik $P_{n_1n_2}$ występuje całka podwójna z funkcji wymiernej z wyrażeniem liniowym $(x_1 - x_2)$ w mianowniku. Pojawienie się właśnie tego wyrażenia uniemożliwia zastosowanie metody Appella do rozwijania funkcji drugiej kategorii w szereg Fouriera przez wyrażenie $P_{n_1n_2}$ za pomocą iloczynu całek pojedyńczych.

W pracy [**12**] Krygowski podaje nową metodę rozwinięcia funkcji theta takiego typu, jak $\frac{\vartheta^2_{\mu\nu}(v_1,v_2)}{\vartheta^2_5(v_1,v_2)}$. Do uzyskania rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji hipereliptycznych drugiej kategorii Krygowski stosuje algorytm z pracy [**10**] na wyrażania całek abelowych postaci I_k za pomocą całek kanonicznych pierwszego i drugiego rodzaju. W metodzie opracowanej przez Krygowskiego wykorzystuje się klasyczne wyniki Königsberga (opublikowane w tomie 65 *Journal für die reine und angewandete Mathematik*) oraz wspomniane już wzory na funkcje theta Weierstrassa i Webera oraz funkcje theta w postaci Rosenchaina. W pracach [**10**] i [**12**] Krygowski wielokrotnie ilustruje działanie swojej metody (rozwijania funkcji hipereliptycznych w szereg Fouriera) przykładami obliczeń dla krzywych rodzaju 2 i 3 (patrz na przykład wzory (5.39) i (5.40) z pracy [**12**], dla $g = 2$).

W pracy [**13**] Krygowski podaje nowy dowód rozwinięcia funkcji eliptycznej $sn(u)$ Jacobiego w szereg trygonometryczny

$$sn(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n} \sin \frac{n\pi u}{K}$$

gdzie $4K$ jest okresem funkcji $sn(u)$. Jacobi uzyskał to rozwinięcie za pomocą funkcji theta. Dowód Krygowskiego z pracy [**13**] jest prostszy od dowodu Jacobiego, bo wykorzystuje ogólną metodę rozwijania funkcji meromorficznych w szeregi trygonometryczne pochodzącą od Appela (*Acta Mathematica*, tom XIII) i nie używa skomplikowanych technicznie własności funkcji theta.

Prace [**14**] i [**15**] z algebry liniowej zawierają ciekawy wynik z teorii wyznacznika macierzy kwadratowej o współczynnikach w ciele. Autor podaje uogólnienie wzoru Trudi-Gordana na obliczanie liczby inwersji w rozkładzie dowolnej permutacji. Ten nowy wzór na liczbę inwersji został następnie zastosowany przez Krygowskiego do rozkładu wyznacznika na sumę produktów trzech wyznaczników niższych rzędów metodą Laplace'a i Vandermonde'a. W tym rozkładzie atuor zastępuje klasyczną regułę znaków Jacobiego lepszym sposobem obliczania znaków, który wyprowadza z uzyskanego przez siebie uogólnienia wzoru Trudi-Gordana.

Prace [**16**] i [**21**] są poświęcone teorii równań algebraicznych piątego stopnia o współczynnikach zespolonych. Z teorii Galois wiemy, że wielomiany jednej zmiennej o współczynnikach zespolonych stopnia mniejszego od pięciu mają rozwiązalne grupy Galois, co w praktyce oznacza, że pierwiastki takich wielomianów (to znaczy rozwiązania odpowiednich równań algebraicznych) można wyrazić przez współczynniki posługując się przy tym operacjami algebraicznymi: dodawaniem, mnożeniem i obliczaniem pierwiastka z liczby. Szczególny przypadek takiego wyrażenia pierwiastków przez współczynniki za pomocą operacji algebraicznych zachodzi dla wielomianu kwadratowego. Wtedy posługujemy się wzorami z pierwiastkiem kwadratowym z wyróżnika (dobrze znana "delta" z lekcji matematyki ze szkoły średniej). W przypadku wielomianów piątego i wyższych stopni grupa Galois zazwyczaj nie jest grupą rozwiązalną, co na podstawie tego samego twierdzenia Galois oznacza, że nie można wyrazić pierwiastków przez współczynniki za pomocą, li tylko operacji algebraicznych. W tym przypadku niezbędne okazują się funkcje nie algebraiczne, tak zwane funkcje przestępne, a dokładniej funkcje eliptyczne, gdy stopień wynosi pięć, oraz pewne funkcje theta dla wielomianów wyższych stopni.

Intensywne poszukiwania skutecznego algorytmu na pierwiastki wielomianów wyższych stopni (opartego na funkcjach przestępnych) były prowadzone od lat czterdziestych dziewiętnastego stulecia, to jest od momentu, gdy opublikowano (pierwotnie zagubione) prace Galois. W czasie, gdy działał profesor Krygowski istniały dwa podstawowe sposoby podejścia do tego problemu podane, odpowiednio, przez Hermite'a i Kleina. W pracy [**16**] Krygowski i Seipelt używają sposobu Kleina opartego o tak zwane równanie dwudziestościanu (patrz F.Klein: *Vorlesungen über Icosahedron*, 1888), który pozwala wyrazić pierwiastki wielomianu stopnia piątego za pomocą wartości pewnych funkcji modularnych. Krygowski i Seipelt ulepszają metodę Kleina (za pomocą wyboru innego niezmiennika geometrycznego) czyniąc ją dogodniejszą do zastosowań w konkretnych obliczeniach. W tym miejscu zacytujemy omówienie pracy [**16**] z tomu III *Sprawozdań PTPN* z 1933 roku, choćby ze względu na elegancki styl i piękny język tego tekstu. Można przy-puszczać, że autorem tego sprawozdania był Zdzisław Krygowski.

Zdzisław Krygowski i Lidja Seipeltówna: *Przyczynek do teorii równań rozwiązujących równania dwudziestościanu.*

W powyższej pracy z jednej strony podany jest sposób badania grupy obrotów dwudziestościanu na podstawie odpowiedniego modelu, z drugiej zaś strony zostało wprowadzone nowe równanie rozwiązujące równania dwudziestościanu na podstawie formy odpowiadającej środkom krawędzi ośmiościanu, wpisanego w dwudziestościan. Forma ta rzędu dwunastego ma kształt:

$$K = 11(z_1^{12} + z_2^{12}) - 84(z_1^{11}z_2 - z_1z_2^{11}) - 66(z_1^{10}z_2^2 + z_1^2z_2^{10}) -$$

$$-220(z_1^9z_2^3 - z_1^2z_2^9) + 165(z_1^8z_2^4 + z_1^4z_2^8) - 264(z_1^7z_2^5 - z_1^5z_2^7) - 924z_1^6z_2^6.$$

i czyni zadość równaniu:

$$K^5 + \alpha f K^4 + \beta f^2 K^3 + \gamma f^3 K^2 + \delta f^4 K + \epsilon T^2 + \kappa H^3 = 0,$$

gdzie f, T, H są znane formy niezmienne Kleina, zaś α, β, γ, δ, ϵ, κ mają następujące wartości liczbowe:

$$\alpha = 420$$

$$\beta = 74190$$

$$\gamma = 6974900$$

$$\delta = 349673625$$

$$\epsilon = 4286875$$

$$\kappa = 4447926.$$

Dla

$$K = \bar{K} - \frac{420f}{5} = \bar{K} - 84f$$

powyższe równanie przyjmuje prostszy kształt:

$$48\bar{K}^5 + 15840f^2\bar{K}^3 + 6388800f^3\bar{K}^2 + 73790640f^4\bar{K} +$$

$$+161051T^2 + 7891499H^3 = 0.$$

Między funkcjami K, t, W, przyczem t oraz W są funkcjami wprowadzonemi przez Kleina, zachodzi związek

$$K^2 + 135t^4 + 256W^3 = 0$$

analogiczny do związku Kleina

$$T^2 + H^3 - 1728^5 = 0.$$

Metoda Kleina rozwiązywania równania algebraicznego stopnia piątego i związane z nią badania przyczyniły się do powstania wielu nam współczesnych ważkich teorii matematycznych, takich jak teoria form i funkcji automorficznych, teoria grup arytmetycznych, czy teoria rozmaitości Shimury. Praca [**21**] zawiera analizę rozwiązania pewnej klasy równań piątego stopnia, dla której metoda Hermite'a prowadzi do wyrażenia pierwiastków przez wartości funkcji algebraicznych od współczynników wielomianu. Na zakończenie dodajmy, że dopiero w 1986 roku McMullen podał dobry algorytm (z czasem wielomianowym) na obliczanie pierwiastków wielomianu stopnia piątego, dalej modyfikując metodę Felixa Kleina. Dla wielomianów stopni wyższych od pięciu wiadomo tylko, że do wyrażenia pierwiastków przez współczynniki potrzebne są pewne funkcje theta, które można zastąpić funkcjami modularnymi Siegela drugiego rodzaju. Dowiódł tego Uemaru w 1983 roku. Skutecznego, wielomianowego algorytmu na pierwiastki dla stopni większych od pięciu, jak do tej pory nie poznaliśmy.

Prace [**17**], [**18**] i [**19**] zostały opublikowane w bardzo dobrym czasopiśmie matematycznym Bulletin des Sciences Mathematiques redagowanym w tamtych czasach przez E. Picarda, na krótko przed przejściem profesora Krygowskiego w stan spoczynku w 1937 roku. Wspomniane prace dotyczą wzoru na wyznacznik Kieperta z teorii funkcji eliptycznych. W tej teorii funkcja σ Weierstrassa pełni rolę uniweralnej funkcji theta, przez którą można wyrazić funkcje eliptyczne. Najprostszą tego typu tożsamość spełnia funkcja $\wp$ Weierstrassa

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}.$$

Szczególnie ważne są tożsamości łączące funkcję $\wp$ i jej wyższe pochodne z funkcją sigma. Taką tożsamością jest wzór Kieperta

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \wp(u_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp(u_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \wp(u_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1!2!3!\dots n! \frac{\sigma(\sum u_i)\prod_{j\neq k}\sigma(u_j - u_k)}{\sigma^{(n+1)}(u_0)\sigma^{(n+1)}(u_1)\dots\sigma^{(n+1)}(u_n)}.$$

Wzór Kieperta znajduje zastosowania w wielu miejscach teorii funkcji eliptycznych, szczególnie w teorii mnożenia zespolonego oraz w metodzie Kieperta rozwiązywania równań algebraicznych stopnia piątego za pomocą funkcji sigma. Wzór Kieperta wyprowadza się zazwyczaj z twierdzenia Abela-Liouville'a. W pracy [**18**] Krygowski dowodzi wzoru Kieperta za pomocą bardziej elementarnej metody, opartej na zastosowaniu twierdzenia Hermite'a o istnieniu zależności liniowej pomiędzy $n+1$ funkcjami theta tej samej charakterystyki i tego samego rzędu n. Szczególnie ciekawa jest praca [**17**], w której Krygowski uzyskuje dowody szeregu skomplikowanych tożsamości stanowiących uogólnienia twierdzenia o dodawaniu funkcji sigma. Jedną z najprostszych włsności jest znikanie następującej sumy dwudziestu wyrazów

$$\sum(-1)^{i_1+i_2+i_3} \quad \begin{aligned} &\sigma(u_{i_1}+u_{i_2}+u_{i_3})\sigma(u_{j_1}+u_{j_2}+u_{j_3}) \times \\ &\times\sigma(u_{i_1}-u_{i_2})\sigma(u_{i_1}-u_{i_3})\sigma(u_{i_2}-u_{i_3})\sigma(u_{j_1}-u_{j_2})\sigma(u_{j_1}-u_{j_3})\sigma(u_{j_2}-u_{j_3}) \times \\ &\times\sigma^3(u_{i_1})\sigma^3(u_{i_2})\sigma^3(u_{i_3})\sigma^3(u_{j_1})\sigma^3(u_{j_2})\sigma^3(u_{j_3}) = 0, \end{aligned}$$

gdzie suma jest wzięta po wszystkich trójkach wskaźników $i_1 < i_2 < i_3$ oraz $j_1 < j_2 < j_3$, które przebiegają zbiór liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 6\}$.

Lista prac matematycznych profesora Zdzisława Krygowskiego

[1] *O pewnej klasie funkcji przestępnych i ich rozwijaniu na szeregi Fouriera*, Prace Mat.-Fiz. **5** (1894), 70-84.

[2] *Sur les fonctions et espaces lacunaires*, Bull. Soc. Math. Franc. **25** (1897), 240-243.

[3] *Przyczynek do teoryi funkcyj o obszarach osobliwych*, Prace Mat.-Fiz. **9** (1898), 213-221.

[4] *Z teoryi funkcyj analitycznych*, Wiad. Mat. **3** (1899), 147-154.

[5] *O pewnym zastosowaniu funkcyi theta*, Sprawozdania I Gimnazjum w Przemylu, Nakładem Funduszu Naukowego, drukiem J. Styfiego, Przemyśl 1900, 3-20.

[6] *O pewnym zastosowaniu funkcyi theta*, Wiad. Mat. 4 (1900), 253-255.

[7] *O rozwijaniu funkcyi hypereliptycznych pierwszego rzędu na szeregi Fouriera*, Program II Szkoły Realnej, Lwów 1905, 3-31.

[8] *Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonomtriques*, C. R. Acad. Sci. Paris **144** (1907), 889-892.

[9] *O pewnych kształtach caek kanonicznych hypereliptycznych drugiego gatunku i ich związkach z funkcyami theta*, Wiad. Mat. **12** (1908), 27-34.

[10] *Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonométriques (O rozwinięciu funkcyj hypereliptycznych na szeregi trygonometryczne)*, Prace Mat.-Fiz. **19** (1908), 21-61.

[11] *Sur les intégrales hyperelliptiques canoniques de seconde espace*, C. R. Acad Sci. Paris **146** (1908), 914-915.

[12] *Sur le développement des fonctions hyperelliptiques en séries trigonométriques, deuxieme parte*, Prace Mat.-Fiz. **20** (1909), 153-187.

[13] *O rozwijaniu funkcji Z(u) Jacobiego na szereg trygonometryczny*, Prace. Kom. Mat. Przyr. PTPN (1921), 37-48.

[14] *Solution d'un probleme d'analyse combinatoire et son application la théorie des dterminants*, Bull. Soc. Amis. Sci. Pozna (1928), 67.

[15] *O rozwiązaniu pewnego zagadnienia z analizy kombinacyjnej i jego zastosowaniu w teorii wyznacznikw*, Wyd. PTPN (1928), str. 8.

[16] *Sur une équation résolvante de l'équation de l'icosaedre*, Bull. Soc. Amis. Sci. **B.4** (1930), 10-18. (współ. L. Seipelt).

17] *Sur certaines généralisations de l'équation a trois termes entre les fonctions sigma*, Bull. Sci. Math. **60** no. 2 (1936), 72-79.

[18] *Remarques sur la formule de Kiepert dans la thorie des fonctions elliptiques*, Bull. Sci. Math. **61** no. 2 (1937), 110-114.

[19] *Calcul du déterminant de Kiepert dans la théorie des fonctions elliptiques*, Bull. Sci. Math. **61** no. 2 (1937), 197-200.

[20] *Sur une certaine famille de surfaces transcendantes*, Bull. Soc. Amis. Sci. **B.12** (1953), 107-111.

[21] *Sur une classe des équations algébriques du cinquime degré résolubles algébriquement*, Bull. Soc. Amis. Sci. **B.13** (1956), 295-299.