

Seminarium SFARA (Metody Lokalne)

B1-37(?), czwartek 11.45-13.15

Prowadzący: W.Gajda i B.Bzdęga

Uczestnicy: J.Garnek, K.Górniewicz, A.Kaim, A.Kokosza,
M.Krawiarz, M.Narożańska, Ł.Nizio i W.Wawrów

Na zbiorze liczb wymiernych \mathbf{Q} wartość bezwzględna $|\cdot|$ zadaje metrykę $d(x, y) := |x - y|$. Na wykładach analizy poznajemy konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych, który powstaje z \mathbf{Q} za pomocą procesu *uzupełnienia* względem metryki d . Uzupełnienie można zastosować do dowolnego ciała, na którym istnieje *waluacja*, za pomocą której definiuje się wartość bezwzględną o podobnych własnościach do tych jakie ma zwykła wartość bezwzględna $|\cdot|$ na ciele \mathbf{Q} . Nawet na ciele liczb wymiernych dla każdej liczby pierwszej p można określić nową wartość bezwzględną, która po uzupełnieniu prowadzi do konstrukcji ciała liczb p -adycznych \mathbf{Q}_p . Ciała p -adyczne (dla wszystkich liczb pierwszych p) stanowią bardzo ważną klasę ciał wykorzystywaną od ponad stu lat w wielu działach matematyki, np. w algebraicznej teorii liczb, w geometrii algebraicznej i arytmetycznej, a nawet w analizie funkcjonalnej.

W ramach naszego seminarium w tym semestrze poznamy podstawy teorii waluacji na ciałach. W szczególności, będziemy studiować: przedłużanie waluacji w rozszerzeniach ciał, *dekompozycję* i *inercję* przedłużenia waluacji, a także elementy teorii Galois dla ciał z waluacją. Większość wykładów SFARy w tym semestrze oparta zostanie na książce [EP05]. Uwadze uczestników seminarium polecamy również książki z metod lokalnych dostępne w bibliotece Wydziału (w dziale Teoria Liczb) omawiające wiele innych aspektów i zastosowań teorii waluacji. *Seminarium z Metod Lokalnych* skierowane jest do wszystkich studentów po podstawowym kursie algebry, którzy interesują się (lub zamierzają zainteresować się) teorią liczb, geometrią algebraiczną, topologią algebraiczną lub niearchimedesowską analizą funkcjonalną.

Wykład 1. (Grupy uporządkowane i waluacje na ciałach): Omawiamy podrozdział 2.1 z [EP05], za wyjątkiem Thm. 2.1.4, ale z uwagami, które tam występują. Następnie (co najmniej naszkicować) dowód Thm. 2.2.1. Podkreślić stwierdzenie o jedyności przedłużenia waluacji z Cor. 2.2.2. Przypadek $\Gamma = 0$, $\Gamma' = \mathbf{Z}$ oraz $\gamma = 1$ należy omówić jako pierwszy nietrywialny przykład waluacji X -adycznej na $k(X)$. Ponadto naszkicować zastosowanie Cor. 2.2.2 do przedłużenia Gaussa waluacji z k na $k(X)$. **13 października, wykład** J.Garnek

Wykład 2. (Zależność waluacji i topologia indukowana waluacją): Omówić podrozdział 2.3: waluacje zależne, pierścień waluacji \mathcal{O} w ciele K , ideały pierwsze, podgrupy spójne w Γ , składanie waluacji i topologia indukowana przez waluacje, pierwsze własności i zależności waluacji. **20 października, wykład**: Łukasz Nizio.

Wykład 3. (Uzupełnienie ciała z waluacją): Własności zupełności i uzupełnienia z podrozdziału 2.4 z [EP05], w tym omówienie zmiany liczby kardynalnej przy uzupełnieniu ciała. Następnie dowieść istnienia i jedyności uzupełnienia (Thm. 2.4.3). Uzupełnić szczegóły dowodowe tego twierdzenia i przy okazji przeprowadzić dowód Thm. 1.1.4. Na koniec podać Prop.

2.4.4 i Thm. 2.4.5 i w miarę możliwości czasowych przeprowadzić ich dowody. **27 października**, wykład: Magdalena Narożańska.

Wykład 4. (Przykłady waluacji na \mathbf{Q} i $k(X)$, liczby p -adyczne i szeregi Laurenta): Korzystamy głównie z podrozdziału 1.3 dla omówienia podstawowych własności waluacji na \mathbf{Q} i $k(X)$. Przeprowadzić dowód lematu Hensela (Thm. 1.3.1). Wprowadzić waluację v_∞ na $k(X)$ oraz przeprowadzić dowód klasyfikacji wszystkich waluacji na \mathbf{Q} i tych na $k(X)$, które redukują się do trywialnej na ciele k (Thm. 2.1.4). **3 listopada**, wykład: Andrzej Kokosza.

Wykład 5. (Aproksymacja): Celem tego wykładu będzie przeprowadzenie dowodów Thm. 2.4.1 i Thm. 2.4.7. Omówić Remark 2.4.6. **10 listopada**, wykład: Wojtek Wawrów.

Wykład 6. (Przedłużenie waluacji i przedłużenie algebraiczne I): Omówić podrozdział 3.1 z [EP05], w szczególności: przedłużanie waluacji, twierdzenie Chevalley). Ponadto przerobić część podrozdziału 3.2, aż do Cor. 3.2.5 włącznie (indukowane rozszerzenia ciała reszt i grupy wartości waluacji). **17 listopada**, wykładają: Aleksandra Kaim i Łukasz Nizio.

Wykład 7. (Przedłużenie waluacji i przedłużenie algebraiczne II): Kontynuujemy omawianie podrozdziału 3.2 z [EP05], w szczególności: normalizacja pierścienia waluacji w rozszerzeniu algebraicznym. **24 listopada**, wykładają: Aleksandra Kaim i Łukasz Nizio.

Wykład 8. (Przedłużenie waluacji na rozszerzenia normalne i Galois): Dokończymy omawianie podrozdziału 3.2 (Thm. 3.2.14 i Prop. 3.2.16 z dowodami). Następnie przeprowadzić dowód "nierówności podstawowej" $\sum_i e(\mathcal{O}_i/\mathcal{O})f(\mathcal{O}_i/\mathcal{O}) \leq [L : K]$ dla skończonego rozszerzenia Galois L/K (Lem. 3.3.1 i Lem. 3.3.2). **1 grudnia**, wykładają K.Górnisiewicz i M.Krawiarz: .

Wykład 9. (Waluacje Hensela): Omawiamy podrozdział 4.1, aż do Lematu Krasnera (Thm. 4.1.7) włącznie. Jeśli czas na to pozwoli, przeprowadzić także dowód własności maksymalności algebraicznej ciała z waluacją z Thm. 4.1.10. **8 grudnia**, wykład: Magdalena Narożańska.

Wykład 10. (Grupy proskończone i teoria Galois): Podrozdział 5.1 z [EP05]: definicja i pierwsze własności grup proskończonych, $Gal(L/K)$ jest proskończona jeśli L/K jest Galois. Na koniec omówić (bez dowodu) odpowiedniość Galois dla rozszerzeń nieskończonych. **15 grudnia**, wykład: Aleksandra Kaim.

Wykład 11. (Rozszerzenia nierozgałęzione): Omawiamy cały podrozdział 5.2 z [EP05], i w szczególności: grupa i ciało dekompozycji dla $\mathcal{O}^s/\mathcal{O}$, henselizacja oraz grupa i ciało inercji dla $\mathcal{O}^s/\mathcal{O}$. **5 stycznia 2017**, wykład: Jędrzej Garnek.

Wykład 12. (Rozszerzenia rozgałęzione I): Omawiamy Thm. 5.3.3 (1) i (2) z dowodami (w tym także potrzebny w dowodzie Lem. 5.3.4). **12 stycznia**, wykład: W.Gajda.

Wykład 13. (Rozszerzenia rozgałęzione II): Pozostała część dowodu Thm. 5.3.3 tzn. punkty (3) - (6) tego twierdzenia. Zakończymy omówieniem Thm. 5.3.3 i Thm. 5.3.4 oraz Cor. 5.3.8. Jeżeli czas pozwoli, opiszemy jeszcze charakteryzację rozszerzeń henselowskich zawartą w podrozdziale 5.4.¹ **19 stycznia**, wykład: W.Gajda.

Literatura

[EP05] A.I.Engler, A.Prestel: *Valued Fields*, Springer Monographs in Math, Springer Ver. 2005.

¹Bardzo ciekawy rozdział 6 książki [EP05] zawiera prezentację trzech ważnych zastosowań teorii waluacji. Samodzielną lekturę tego rozdziału polecamy uczestnikom SFARy. W następnym semestrze możemy przeprowadzić trzy dodatkowe wykłady na temat tych zastosowań. przygotował Wojciech Gajda