

Seminarium SFARA

przeglądowe z teorii form modularnych

B1-37, poniedziałek, 10.00 - 11.30¹

Uczestnicy: B.Bzdęga, W.Gajda, J.Garnek, K.Górniewicz, A.Kaim,
A.Kokoszka, M.Krawiarz, M.Narożańska, Ł.Nizio, M.Nuc, W. Robaszkiewicz i B.Szydło

Podczas seminarium SFARA w tym semestrze omówimy podstawy teorii eliptycznych form modularnych. Formy modularne stanowią jedną z najwspanialszych klas funkcji w całej matematyce. Pojawiają się w naturalny sposób w analitycznej teorii liczb, w teorii równań diofantycznych, geometrii algebraicznej, teorii reprezentacji grup Galois i w mniej oczekiwanych miejscach, jak na przykład kombinatoryka algebraiczna lub fizyka matematyczna. Będziemy posługiwali się notatkami z wykładów Ernesta Kaniego o formach modularnych oraz klasycznym podręcznikiem Diamonda-Shurmana. Wykłady seminarium powinny być dostępne i dobrze zrozumiałe dla studentów matematyki po trzech semestrach analizy (oczywiście głównie tych którzy poważnie interesują się teorią liczb, algebrą lub analizą).

Wykład 1. (Definicje i przykłady):

- (na podstawie [K], rozdziały 1.3.1-1.3.2), Def: słaba modularność, waga, cusp form etc.
- Przykłady z dowodami modularności oraz rozwinięciem Fourier'a: $E_k, E_2, \Delta, \eta, j, \Theta, P_{m,k}$
- generatory $SL_2(\mathbb{Z})$
- Definicje przestrzeni $\mathcal{M}_k, \mathcal{A}_k, \mathcal{S}_k$
- modularność funkcji θ -równość (1.28)

29 lutego, wykłada: Jędrzej Garnek

Wykład 2. (Przestrzenie form modularnych):

- (na podstawie [K], rozdziały 1.3.1-1.3.2)
- Obszar fundamentalny $SL_2(\mathbb{Z})$ (na podstawie [DS, Lemma 2.3.1] lub [Z, Proposition 1])
- formuła na liczbę zer formy modularnej wraz z krotnościami ([K, Proposition 1.3] lub [Z, Proposition 2])
- Twierdzenia o postaci $\mathcal{M}_k$ oraz twierdzenia o $\dim SL_2(\mathbb{Z})$ ([K, Proposition 1.5]),
- [K, Theorem 1.2] ($A_0 = \mathbb{C}(j)$)

14.03, wykłada: Maria Nuc

¹Druga opcja terminu SFARy w tym semestrze: czwartek, 10.00-11.30

Wykład 3. (Zastosowania):

- (na podstawie [K], rozdziały 1.3.3-1.3.6)
- $E_4^2 = E_8$ oraz tożsamości na σ
- Proposition 1.13 oraz Corollary 1.14
- twierdzenia o rzędzie wzrostu: [K] Tw.1.15 (Heckego), Corollary 1.16 oraz Tw.1.17 (Ramanujan'a)
- Unimodular lattices, Tw. 1.18

21.03, wykład: Mietek Krawiarz

Wykład 4. i 5. (Operatory Heckeego):

- (na podstawie [K], rozdziały 1.5.1, 1.5.2 oraz [DS], rozdział 5.9)
- motywacja: τ Ramanujana i mnożliwość współczynników,
- wzory [K] (1.63) oraz (1.64),
- Prop. 1.25 [K] (działanie op. Heckeego na współczynnikach Fouriera),
- Wzór rekurencyjny ([K, Thm 1.26])
- Definicje: Algebra Heckeego, forma własna, charakter, Przykłady form własnych ([K, Example 1.27])
- Twierdzenie. 1.28 z [K] wraz z wnioskiem (Multiplicity One Theorem)
- L-funkcje [DS, 5.9]: zbieżność dla $\Re(z) > k$ oraz (dla cusp form) dla $\Re(z) > \frac{k}{2}$, iloczyn Eulera, związek z transformatą Mellina, równanie funkcyjne (bez dowodu)
- Tw. 1.35 (Heckego) [K] z dowodem,
- Iloczyn skalarny Petersona,
- udowodnić, że $T_n^* = T_n$ ([Mi, Theorem 4.5.4])
- Tw 1.39 znormalizowane $\mathbb{T}$ -funkcje własne tworzą bazę M_k

4.04, 11.04, wykład: Bartłomiej Bzdęga

Wykład 6. i 7. (Interpretacja modularna oraz podgrupy kongruencyjne):

- krzywe i funkcje eliptyczne (na podstawie [K, 1.4.1] oraz [K, 1.4.2]) Proposition 1.19 [K] (izomorfizm $\frac{\mathbb{C}}{L} \cong E_L$ – bez dowodu)
- funkcje krat ([K, 1.4.3]); wyjaśnić dlaczego wystarczy rozważać kraty postaci $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$,
- Proposition 1.21 [K] ($j : Sl_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$)
- twierdzenie o uniformizacji ([K, Prop. 1.22]) wraz z wnioskiem 23 ($E_1 \cong E_2 \Rightarrow j_1 = j_2$)
- grupy $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N), \Gamma(N)$ – definicje ([K, 2.2.1]) oraz relacje między nimi ($\Gamma(1) \backslash \Gamma(N) = \dots, \Gamma_1(N) \backslash \Gamma(N) = \dots, \Gamma_0(N) \backslash \Gamma_1(N) = \dots$), definicja podgrupy kongruencyjnej,
- interpretacja modularna ilorazów $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$ – [DS, Theorem 1.5.1] (uzasadnić jeden z

podpunktów twierdzenia),

- przykład obszaru fundamentalnego [DS, zadanie 3.1.4]
- definicje słabej modularności, holomorficzności w cuspach, funkcji modularnych dla grup kongruencyjnych (na podstawie [K, rozdział 2.2.2]), ([K, remark 2.3 (d)]),

18.04 i 25.04, wykładają: Łukasz Nizio i Aleksandra Kaim

Wykład 8. i 9. (Formy modularne wyższych poziomów):

- funkcje Weber’a i Fricke’go ([K, Example 2.4])
- Tw. 2.5 [K] o generowaniu ciała funkcji modularnych przez funkcje Fricke’go + wnioski
- Tw. 2.8 [K] oraz grupa $\mathcal{G}(M)$
- Lemat 2.15 [K] o postaci multiplikatywnej wielomianu modularnego
- Formy modularne wyższych poziomów – definicja,
- Prop. 2.20 wraz ze wnioskiem 2.21 o skończoności wymiaru przestrzeni form modularnych o ustalonej wadze
- $L(s, w)$ jest przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{C}$
- Przykład 2.23
- Prop. 2.25 o rozkładzie na sumę prostą przestrzeni form modularnych + wnioski

9.05 i 16.05, wykładają: Krzysztof Górniewicz i Bogdan Szydło

Wykład 10. i 11. (Wymiar $S_2(\Gamma)$ oraz operatory Hecke’a dla wyższych poziomów):

- (na podstawie [DS], rozdziały 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 oraz [DS], rozdział 5.9)
- wymiar $S_2(\Gamma)$ [K, Proposition 2.28],
- definicje (na podstawie [DS, 5.2, 5.3]): double coset operator, operator $\langle d \rangle$, operatory Hecke’a (definicja najpierw dla liczb pierwszych – [DS, str. 169], potem dla ich potęg, następnie dla dowolnego n – [DS, wzory (5.10), (5.11)])
- postać jawna T_n ([DS, Proposition 5.2.1]),
- działanie T_n na współczynnikach Fouriera ([DS, Proposition 5.3.1]. Przy okazji należy udowodnić [DS, Proposition 5.2.2(a)]),
- operatory $T_p, \langle n \rangle$ komutują ([DS, Proposition 5.2.4]),
- iloczyn Petersona ([DS, def. 5.4.1]),
- operatory sprzężone do $T_n, \langle n \rangle$ ([DS, Proposition 5.5.2 oraz Theorem 5.5.3])
- $S_k(\Gamma_1(N))$ posiada ortogonalną bazę złożoną z form własnych ([DS, Theorem 5.5.4]).

23.05 i 30.05, wykładają: Jędrzej Garnek i Wiktoriusz Robaszkiewicz

Wykład 12. i 13. (Teoria Atkina-Lehnera):

- Def.5.6.1 [DS], Stare oraz nowe formy
- Prop.5.6.2 [DS] (Działanie $T_n, \langle n \rangle$ na starych i nowych formach),
- Thm.5.7.1 [DS] („Główny lemat”), Thm.5.8.2 [DS], Thm.5.8.3 [DS].

Powyższe twierdzenia należy udowodnić, pomijając przeliczenia i techniczne detale.

07.06 i 14.06, wykłada: Wojciech Gajda

Literatura²

- [K] E.Kani, *Lectures on Applications of Modular Forms to Number Theory*,
[DS] F.Diamond, J.Shurman, *A First Course in Modular Forms*, Springer Verlag 2010.
[Z] D.Zagier, *Elliptic Modular Forms and Their Applications* – artykuł można znaleźć w książce *The 1-2-3 of Modular Forms*, Springer Lecture Notes, 2003.
[Mi] I.Miyake, *Modular Forms*, Springer Verlag 1983.

Program seminarium przygotowali W.Gajda, J.Garnek i Ł.Nizio.

²Wszystkie pozycje z tego spisu dostępne są w bibliotece WMI UAM lub w B1-35.