Matematyka w klasie IE
Zadania do zajęć w *Marynce* prof. W. Gajda
Jesień 2012

Liczby całkowite

Zagadka
Pomyśl sobie jakąś dużą liczbę całkowitą. Dodaj do niej tę samą liczbę. Do uzyskanej sumy dodaj jeszcze 10, a wynik podziel przez 2. Od otrzymanej liczby odejmij teraz liczbę, którą pomyślałeś na początku. Po wykonaniu tych czterech działań pozostała Ci liczba 5. Wyjaśnij.

Zadania do pierwszych dwóch lekcji

Zadanie 1.

(1) Oblicz za pomocą algorytmu Euklidesa $NWD(3328, 1599)$.

(2) Znajdź liczby całkowite x_0 i y_0 dla których $3328x_0 + 1599y_0 = 13$.

(3) Rozwiąż równania (w liczbach całkowitych)

  (a) $3328x + 1599y = 13$,
  (b) $1232x + 4319y = 2$,
  (c) $213x - 144y = 12$.

(4) Symbolem $\mathbf{N}$ oznaczamy zbiór liczb *naturalnych*, czyli zbiór liczb całkowitych dodatnich. Ile wynosi $NWD(n, n + 1)$ jeśli n jest dowolną liczbą naturalną ? To samo pytanie dla $NWD(n, n + 3)$.

Zadanie 2.
Rozwiąż kongruencje

(1) $23x \equiv 4 \pmod{25}$,

(2) $9x + 2 \equiv 9 \pmod{19}$,

(3) $1234x \equiv 5 \pmod{6}$.

Zadanie 3.
Oblicz resztę z dzielenia liczby 5^{1234} przez 13.

Zadanie 4*.
Wykaż, że 7 dzieli liczbę $1^{47}+2^{47}+3^{47}+4^{47}+5^{47}+6^{47}$. Taka sama podzielność zachodzi, jeśli 47 zastąpimy dowolną liczbą naturalną nieparzystą. Wyjaśnij.

Zadania domowe i inne

Zadanie 5.
Obliczyć za pomocą algorytmu Euklidesa

(a) $NWD(12345, 67890)$

(b) $NWD(54321, 9876)$.

Zadanie 6.
Rozwiąż w $\mathbf{Z}$ równania liniowe:

(1) $105x + 121y = 1$

(2) $12345x + 67890y = NWD(12345, 67890)$

(3) $54321x + 9876y = NWD(54321, 9876)$.

Zadanie 7.
Rozwiązać kongruencje:

(1) $23x \equiv 4 \pmod{25}$

(2) $9x + 1 \equiv 9 \pmod{19}$

(3) $1234x \equiv 5 \pmod{6}$.

Zadanie 8.
Dla $n \in \mathbf{N}$ niech $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ (czytamy *n silnia*). Oczywiście $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $8! = 5040$ i tak dalej. Oblicz reszty z dzielenia:

(1) liczby $1! + 2! + 3! + \ldots + 50!$ przez 7,

(2) liczby $1! + 2! + 3! + \ldots + 111!$ przez 12.

Zadanie 9.
Rozwiązać kongruencje:

(1) $8x \equiv 6 \pmod{14}$

(2) $66x \equiv 100 \pmod{121}$

(3) $21x \equiv 14 \pmod{91}$.

Zadanie 10.
Ile rozwiązań mają następujące kongruencje ? Nie musisz znajdować rozwiązań.

(1) $72x \equiv 47 \pmod{200}$

(2) $4183x \equiv 5781 \pmod{15087}$

(3) $1537x \equiv 2863 \pmod{6731}$

Zadanie 11.
Posługując się Małym Twierdzeniem Fermata

(1) Znajdź liczbę $0 \leqslant a < 73$ taką, że $a \equiv 9^{794} \pmod{73}$.

(2) Rozwiąż kongruencję $x^{86} \equiv 6 \pmod{29}$.

(3) Rozwiąż kongruencję $x^{39} \equiv 3 \pmod{13}$.

Zadanie 12.
Wykaż, że zachodzą następujące kongruencje

(1) $2^{561} \equiv 2 \pmod{561}$ oraz $3^{561} \equiv 3$
Wskazówka. Wykorzystaj rozkład liczby 561 na czynniki pierwsze i **MTF**.

(2) $5^{6614} - 12^{857} \equiv 1 \pmod{7}$.

Zadanie 13.
Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$$

jest liczbą całkowitą. Wykorzystaj **MTF**.

Zadanie 14.
Wykaż, że liczba $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy 6 nie dzieli n.

Zadanie 15.
Żadna z liczb: 12321, 1234321, 123454321, 12345654321, 1234567654321, 123456787654321, 12345678987654321 nie jest liczbą pierwszą. Dlaczego ?

Zadanie 16.
Dowieść, że dla każdego naturalnego $n > 2$ liczby:

$$n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots,\ n! + (n-1),\ n! + n$$

są liczbami złożonymi. Wywnioskować z tego, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje ciąg k kolejnych liczb złożonych.

Zadanie 17.
Liczby 3, 5, 7 są pierwsze. Czy istnieje liczba $p > 3$ taka, że liczby p, $p+2$, i $p+4$ są jednocześnie liczbami pierwszymi ?

Zadanie 18.
Uzupełnij szczegóły następującego dowodu twierdzenia Euklidesa (o tym, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych). Ten dowód pochodzi od Stiejtjesa.

(1) Załóżmy, że istnieje tylko skończenie wiele liczb pierwszych i są to liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Niech $N = p_1 p_2 \ldots p_k$. Oczywiście N jest liczbą złożoną.

(2) Niech $N = nm$, gdzie $n, m > 1$ będzie jednym z przedstawień N w postaci iloczynu dwóch dzielników różnych od 1 i od N. Każda z liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dzieli tylko jedną z liczb n i m.

(3) Rozważ liczbę $n + m$. Czy liczba $n + m$ dzieli się przez $p_1, p_2, \ldots$ lub przez p_k ?

(4) Z **PTA** i z powyższych zdań (3) i (1) wywnioskuj, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zadanie 19. (liczby pierwsze Mersena)

(1) Sprawdź, że zachodzi następujący wzór sktróconego mnożenia $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$, gdzie x jest dowolną liczbą oraz $n \in \mathbf{N}$.

(2) Niech a i c będą liczbami naturalnymi większymi od 1. Dowieść, że jeśli $a > 2$ lub c jest liczbą złożoną, to $a^c - 1$ jest liczbą złożoną.

(3) Wywnioskuj z (2), że jeżeli $2^c - 1$ jest liczbą pierwszą, to c jest także liczbą pierwszą.

Uwaga. Liczby pierwsze postaci $M_p = 2^p - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą nazywamy *liczbami pierwszymi Mersena*. Liczby $2^p - 1$ są pierwsze jeśli $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433$, natomiast kolejne M_p dla $p < 100000$ są liczbami złożonymi. Największą znaną dzisiaj liczbą pierwszą jest liczba Mersena $M_{43112609}$, która w zapisie dziesiętnym ma 12 978 189 cyfr. Według niedowiedzionej do dzisiaj hipotezy, istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersena.

Zadanie 20. (liczby Fermata)

(1) Sprawdź, że zachodzi następujący wzór stróconego mnożenia $x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + 1)$, gdzie x jest dowolną, a n jest liczbą naturalną nieparzystą.

(2) Niech a i c będą liczbami naturalnymi większymi od 1. Dowieść, że jeśli a jest nieparzysta, lub c ma czynnik nieparzysty, to $a^c + 1$ jest liczbą złożoną.

(3) Liczby $F_n = 2^{2^n} + 1$ noszą nazwę *liczb Fermata*. Dowieść, że jeśli $n \neq m$, to $NWD(F_n, F_m) = 1$. **Wskazówka.** Sprawdź, że $F_m|(F_n - 2)$ o ile $n > m$.

(4) Wywnioskuj korzystając z (3), że istnieje nieskończenie wele liczb pierwszych.

Uwaga. $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ i $F_4 = 2^{16} + 1 = 65457$ są liczbami pierwszymi, natomiast F_5 dzieli się przez 641 co wynika z następującego rachunku podanego przez Eulera: $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \times 2^7 + 1$ z czego dostajemy, że $2^4 = 641 - 5^4$ oraz $2^{32} = 2^4 2^{28} = 641 \times 2^{28} - (5 \times 2^7)^4 = 641 \times 2^{28} - (641 - 1)^4 = 641k - 1$. Ponadto wiadomo, że $F_5 = 641 \times 6700417$ oraz, że $274177|F_6$, $59649589127497217|F_7$ i następne 43 liczby Fermata są złożone. Według niedowiedzionej do dzisiaj hipotezy wszystkie liczby Fermata, poczynając od F_5, są liczbami złożonymi.

Zadanie 21.
Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych $p \equiv 3 \mod 4$. Wzorować się na klasycznym dowodzie Euklidesa tego, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.